INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK — WS 2004/2005

6. Übungsblatt — Abgabe am 7. Dezember bis 14:00

Auf diesem Aufgabenblatt werden die sogenannten *Pauli*-Matrizen benötigt. Diese sind in $\mathbb{C}^2$ definiert als

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

H1. (a) Die Wechselwirkung eines sogenannten „Spins" 1/2 mit einem Magnetfeld in der x-Richtung wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H_\mathrm{s} = -C\,\sigma_x\,,$$

wobei σ_x die Pauli-Matrix aus Glg. (1) ist und $C = eB\hbar/(2mc)$ ist.
Stellen Sie H_s sowie den Zeitentwicklungs-Operator

$$U(t) = \mathrm{e}^{-iH_\mathrm{s}t/\hbar}$$

als 2×2-Matrizen dar !

(b) Geben Sie die Eigenwerte und -vektoren der drei Pauli-Matrizen (1) an !

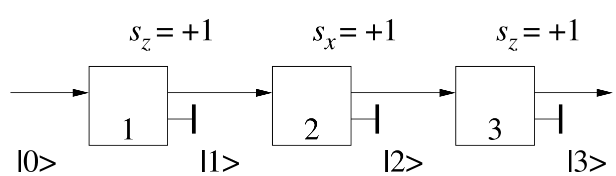
(c) Der Spin-Zustand $s_\alpha \in \mathbb{R}$ bezüglich der Richtung $\alpha = x,\, y,\, z$ wird definiert als Eigenwert der Pauli-Matrix σ_α, d.h.

$$\sigma_\alpha\,|s_\alpha\rangle = s_\alpha\,|s_\alpha\rangle\,.$$

Ein freies Teilchen ($B = 0$, d.h. Spin-Anteil des Hamilton-Operators $H_\mathrm{s} = 0$) werde nun im $s_z = +1$ Zustand präpariert

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Nun werden nacheinander drei *Stern-Gerlach*-Experimente durchgeführt:



Bei einer ersten Messung wird bestimmt, ob das Teilchen im Zustand $s_z = +1$ bzgl. der z-Richtung ist, in der zweiten, ob der Zustand $s_x = +1$ bzgl. der x-Richtung ist und schließlich in der dritten noch einmal, ob der Zustand $s_z = +1$ bzgl. der z-Richtung ist.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, mit dem gegebenen Anfangszustand $|\,0\rangle$, das Teilchen bei der ersten Messung im Zustand $s_z = +1$ zu finden ! Wie lautet der Zustand $|1\rangle$ nach dieser ersten Messung ? Wie ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei der zweiten Messung im Zustand $s_x = +1$ zu finden und wie lautet der Zustand $|2\rangle$ nach dieser Messung ? Bestimmen Sie schließlich die Wahrscheinlichkeit, bei der dritten Messung noch einmal den Zustand $s_z = +1$ zu messen !

(d) Berechnen Sie simultan die Erwartungswerte $\langle\sigma_x\rangle$ und $\langle\sigma_y\rangle$ sowie deren Schwankungsquadrate $\Delta\sigma_\alpha^2 = \langle\sigma_\alpha^2\rangle - \langle\sigma_\alpha\rangle^2$ $(\alpha = x,\ y)$ im in (2) gegebenen Zustand $\mid 0\rangle$! Berechnen Sie ferner die Erwartungswerte des Kommutators $[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x$ sowie des Antikommutators $\{\sigma_x, \sigma_y\} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$ in dem Zustand $|0\rangle$! Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse im Blick auf die verallgemeinerte Unschärferelation !

10 Punkte

H2. Wir bilden das Tensorprodukt $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ und führen darin mit Hilfe der Pauli-Matrizen (1) die folgenden Operatoren ein:

$$H = \sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y\,, \qquad Z = \sigma^z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma^z\,,$$

sowie die Vertauschungs-Operation R, so daß für $|a\rangle\,, |b\rangle\ \in \mathbb{C}^2$

$$R\ (|a\rangle \otimes |b\rangle\ ) = |b\rangle \otimes |a\rangle\ .$$

(a) Stellen Sie H, Z und R als 4×4 Matrizen dar !

(b) Prüfen Sie, daß H, Z und R paarweise kommutieren (d.h. $[H, Z] = [H, R] = [Z, R] = 0$) !

(c) Geben Sie eine *gemeinsame* Basis von Eigenvektoren von H, Z und R an ! Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte von H, Z und R ?

6 Punkte

H3. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)
Ein unitärer Operator U läßt das Skalarprodukt $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ invariant, d.h. $\langle Ua \mid Ub\rangle = \langle a \mid b\rangle$ für alle $\mid a\rangle$, $\mid b\rangle$. Ein Beispiel für einen unitären Operator auf $\mathcal{D}(A)$ ist $U = \mathrm{e}^{iA}$ wenn A hermitesch (selbstadjungiert) ist.
Ein Projektionsoperator Π ist ein Operator mit $\mathcal{D}(\Pi) = \mathcal{H}$ und $\Pi^2 = \Pi$.

(a) Sei $U \mid\psi\rangle\ = \lambda \mid\psi\rangle$ mit U unitär. Wo liegt $\lambda \in \mathbb{C}$?

(b) Gegeben sei ein normierter Vektor $|a\rangle\ \in \mathcal{H}$ $(\langle a \mid a\rangle\ = 1)$.
Zeigen Sie: $\Pi_a = |a\rangle\,\langle a|$ ist ein Projektionsoperator !

(c) Was kann man allgemein über die Eigenwerte eines Projektionsoperators Π sagen ?

(d) Wann ist ein Projektionsoperator unitär ?

(e) Berechnen Sie

$$V = \mathrm{e}^{i\Pi}$$

mit Π Projektionsoperator ! Verwenden Sie das Ergebnis um unter Verwendung von $\Pi^\dagger = \Pi$ nachzurechnen, daß V unitär ist !

5 Zusatzpunkte