INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK — WS 2004/2005

5. Übungsblatt — Abgabe am 30. November bis 14:00

H1. Wir bezeichnen das Skalarprodukt zweier Vektoren $|a\rangle$ und $|b\rangle$ mit $\langle a \,|\, b\rangle$. Zu den Eigenschaften eines Skalarproduktes im strengen Sinn gehört, daß $\langle a \,|\, a\rangle \geq 0$ und Gleichheit genau dann gilt, wenn $|a\rangle$ der Nullvektor ist. Man kann dann über $\| \,|a\rangle\, \| = \sqrt{\langle a \,|\, a\rangle}$ eine Norm einführen.
Zeigen Sie, daß die *Schwarz*sche Ungleichung

$$\| \,|a\rangle\, \| \; \| \,|b\rangle\, \| \geq |\langle a \,|\, b\rangle|$$

gilt !
Hinweis: Betrachten Sie den Zustand $|c\rangle = \alpha\,|a\rangle + \beta\,|b\rangle$ und wählen Sie α und β so, daß $|c\rangle$ senkrecht auf $|b\rangle$ steht.

3 Punkte

H2. Auf dem in A5.2 definierten Hilbertschen Folgenraum ℓ^2 ist das Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle \{a_n\} \,|\, \{b_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\star} b_n\,. \tag{1}$$

Eine Basis von ℓ^2 ist $|1\rangle = |1,0,\ldots\rangle$, $|2\rangle = |1,1,0,\ldots\rangle$, $|3\rangle = |1,1,1,0,\ldots\rangle$, $\ldots$, d.h. $|k\rangle$ ist gegeben durch die Folge $a_n = 1$ für $n \leq k$ und $a_n = 0$ für $n > k$.
Geben Sie hierzu die duale Basis $\langle l\,|$ an, so daß mit dem Skalarprodukt (1) gilt: $\langle l \,|\, k\rangle = \delta_{l,k}$!

3 Punkte

H3. Sei $\mathcal{H}$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$, so daß sowohl f als auch f' quadratintegrabel sind. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist gegeben durch

$$\langle f \,|\, g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, f^{\star}(x)\, g(x)\,.$$

Wir betrachten den Operator

$$P = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

auf folgenden alternativen Definitionsbereichen

$$\mathcal{D}_0(P) = \{f \in \mathcal{H} \mid f(0) = f(2\pi) = 0\} \subset \mathcal{D}_\alpha(P) = \{f \in \mathcal{H} \mid f(2\pi) = \mathrm{e}^{i\alpha} f(0)\}\,.$$

(a) Geben Sie eine Formel für $P^\dagger$ an ! Bestimmen Sie $\mathcal{D}_0(P^\dagger)$ und $\mathcal{D}_\alpha(P^\dagger)$ für die Definitionsbereiche $\mathcal{D}_0(P)$ und $\mathcal{D}_\alpha(P)$!

(b) Wir betrachten nun den Hamiltonoperator eines freien Teilchens

$$H = \frac{P^2}{2m}$$

auf $\mathcal{D}_0(P)$ und $\mathcal{D}_\alpha(P)$. Bestimmen Sie jeweils das Punktspektrum (d.h. die Eigenwerte) von H !

5 Punkte

H4. Mit Hilfe des Produkts AB zweier Operatoren A, B in einem Hilbertraum definiert man den Kommutator

$$[A, B] := AB - BA\,.$$

Überprüfen Sie, daß diese Definition des Kommutators die *Jacobi*-Identität

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

erfüllt !

2 Punkte

H5. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)
Sei $|n\rangle$, $n = 1, 2, ..., \infty$ eine Basis des Hilbertraums $\mathcal{H}$, so daß

$$|a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,|n\rangle \in \mathcal{H} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

und

$$\langle n\,|\,m\rangle = \delta_{n,m}\,.$$

Wir betrachten nun den Operator A, dessen Operation auf $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ gegeben ist durch

$$A\,|n\rangle = n\,|n+1\rangle + |1\rangle\ .$$

Bestimmen Sie $\mathcal{D}(A^\dagger)$ und geben Sie die Operation von $A^\dagger$ auf seinem Definitionsbereich an !

3 Zusatzpunkte