INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

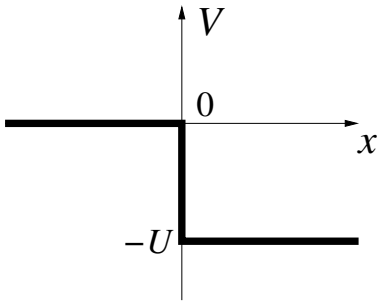
Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

3. Übungsblatt Abgabe der **Hausaufgaben** am 16. November bis 14:00 bei A316/317

Anwesenheitsübung (keine Abgabe)

A1. Wir betrachten die folgende eindimensionale Stufe



d.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ -U < 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

Lösen Sie die Schrödingergleichung mit dem Ansatz

$$\psi(x,t) = \mathrm{e}^{-iEt/\hbar}\, u(x)$$

für negative Energieen ($E < 0$) ! Welche Werte kann E annehmen ? Skizzieren Sie $|\psi(x,t)|^2$ für $E = -U/2$ und interpretieren Sie das Ergebnis !

Hausaufgaben

H1. Das *Ehrenfest*sche Theorem sagt aus, daß Erwartungswerte die kanonischen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik erfüllen.
Wir wollen hier eine Form des Ehrenfestschen Theorems für einen eindimensionalen Hamilton-Operator der Form:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

mit reellem $V(x)$ verifizieren. Der Erwartungswert einer Größe A ist definiert als

$$\langle A \rangle = \int \mathrm{d}x\, \psi(x,t)^\star\, A\, \psi(x,t)\,,$$

wobei $\psi(x,t)$ eine normierte Lösung ($\int \mathrm{d}x\, \psi(x,t)^\star\, \psi(x,t) = 1$) der Schrödingergleichung ist.
Zeigen Sie:

(a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{\partial H}{\partial x} \right\rangle ,$$

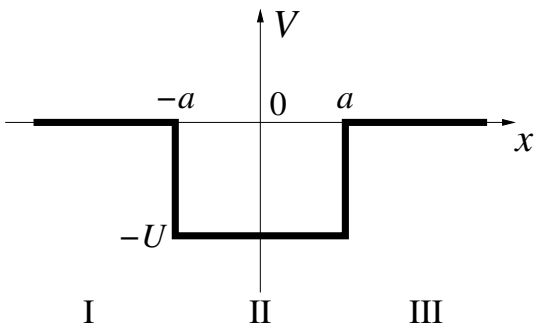
(b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p} \right\rangle \qquad !$$

Hinweis: Verwenden Sie, daß p und x nicht explizit von der Zeit abhängen, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x$, die Schrödingergleichung für ψ und $\psi^\star$, sowie partielle Integration.

6 Punkte

H2. Wir betrachten ein Teilchen in dem folgenden eindimensionalen Potentialtopf



d.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > a \\ -U < 0 & \text{für } |x| < a \end{cases} .$$

(a) Geben Sie die allgemeine normierbare Lösung der Schrödingergleichung für $E < 0$ an !

(b) Klassifizieren Sie die Lösungen nach ihrem Verhalten unter Spiegelung am Ursprung $x \to -x$!

(c) Leiten Sie aus der Bedingung einer glatten Lösung eine Bedingung an die Energie des Teilchens her !

(d) Geben Sie ein graphisches Lösungsverfahren der Eigenwertgleichung für die Energie an und bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen für $2mUa^2/\hbar^2 = 30$!

8 Punkte

H3. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)
Gegeben sei zu einem festen $\vec{k}$ die ebene Welle

$$\psi(\vec{x}, t) = A\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} .$$

(a) Bestimmen Sie $\omega_{\vec{k}}$ so, daß $\psi(\vec{x}, t)$ die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen, d.h.

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

löst !

(b) Berechnen Sie zu $\psi(\vec{x}, t)$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{\jmath}$!

(c) Überzeugen Sie sich, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$ zusammen mit $\vec{\jmath}$ aus Aufgabenteil (b) die Kontinuitätsgleichung erfüllt !

4 Zusatzpunkte