INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

2. Übungsblatt Abgabe am 9. November bis 14:00 bei A316/317

1. Gegeben sei ein Wellenpaket der Form

$$\Psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}(\vec{k})\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)}\,. \tag{1}$$

Ferner wird der Erwartungswert einer Größe A bezüglich einer Funktion $\Psi(\vec{x})$ bzw. $\hat{\Psi}(\vec{k})$ definiert über

$$\langle A\rangle_\Psi = \frac{\int \mathrm{d}^3x\, \Psi^\star(\vec{x})\, A(\vec{x})\, \Psi(\vec{x})}{\int \mathrm{d}^3x\, \Psi^\star(\vec{x})\, \Psi(\vec{x})}\,, \qquad \langle A\rangle_{\hat{\Psi}} = \frac{\int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}^\star(\vec{k})\, A(\vec{k})\, \hat{\Psi}(\vec{k})}{\int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}^\star(\vec{k})\, \hat{\Psi}(\vec{k})}\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie unter Ausnutzung grundlegender Eigenschaften der Fourier-Transformation für zwei Wellenpakete Ψ_1, Ψ_2 mit gleicher Dispersion $\omega_{\vec{k}}$:

$$\int \mathrm{d}^3x\, \Psi_1^\star(\vec{x},t)\, \Psi_2(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}_1^\star(\vec{k})\, \hat{\Psi}_2(\vec{k}) \qquad !$$

(b) Zeigen Sie, daß für die Gruppengeschwindigkeit gilt:

$$\vec{v}_G := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{x}\rangle_\Psi = \langle\vec{\nabla}_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\rangle_{\hat{\Psi}} \qquad !$$

(c) Berechnen Sie $\vec{v}_G$ so explizit wie möglich in den folgenden beiden Fällen:

i. $\omega_{\vec{k}} = \frac{\hbar}{2m}\,\vec{k}^2$,

ii. $\hat{\Psi}(\vec{k})$ ist „konzentriert" um $\vec{k}_0$, so daß man wie folgt entwickeln kann:

$$\omega_{\vec{k}} \approx \omega_0 + \vec{v}_0\cdot(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad !$$

6 Punkte

2. Gegeben sei zur Zeit $t=0$ das *eindimensionale* Wellenpaket

$$\Psi(x,0) = N_\alpha\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}+ik_0x}$$

mit $\alpha > 0$.

(a) Bestimmen Sie N_α, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi^\star(x,0)\, \Psi(x,0) = 1 \qquad !$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der eindimensionalen Variante von (1) die zeitliche Entwicklung ($t>0$) des Wellenpakets für

$$\omega_k = \frac{\beta}{2}\,k^2$$

und $\beta > 0$!

(c) Berechnen Sie für das gegebene Wellenpaket die über (2) definierten Erwartungswerte $\langle x\rangle_t$, $\langle x^2\rangle_t$ und daraus die Standardabweichung

$$\Delta x_t = \sqrt{\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2} \qquad !$$

Hinweis: Integrale dürfen Tabellenwerken entnommen werden.

6 Punkte

3. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)
Um 1900 gab es für die Dichte $\rho(\omega, T)$ der Strahlung mit Frequenz ω eines schwarzen Körpers mit Temperatur T verschiedene Formeln. Das Gesetz von *Rayleigh-Jeans*

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}$$

basiert auf klassischen Betrachtungen und funktioniert gut bei hohen Temperaturen ($\hbar\omega \ll kT$). *Max Planck* gab mit seiner Strahlungsformel einen wichtigen Anstoß für die Entwicklung der Quantenmechanik. Dies wird in der *Einstein*schen Theorie der Übergänge evident.
Wir betrachten hier zwei Zustände E_m, E_n eines Systems mit diskreten Energieniveaus, wobei wir $E_m > E_n$ annehmen. Das System kann von dem höheren Zustand in den niedrigeren übergehen, in dem es einen Lichtquant $\hbar\omega = E_m - E_n$ emittiert. Die Wahrscheinlichkeit einer *spontanen* Emission eines solchen Quants pro Zeit bezeichnen wir mit

$$\mathrm{d}W'_e = a_m^n \mathrm{d}t\,.$$

Ein äußeres Strahlungsfeld der Dichte $\rho(\omega, T)$ kann zudem Übergänge $m \to n$ induzieren. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit der induzierten Emission mit $\mathrm{d}W''_e$, so ist die Gesamtwahrscheinlichkeit der Emission

$$\mathrm{d}W_e = \mathrm{d}W'_e + \mathrm{d}W''_e\,.$$

Schließlich kann ein Lichtquant mit Wahrscheinlichkeit $\mathrm{d}W_a$ bei einem Übergang $n \to m$ absorbiert werden.
Einstein nahm nun an, daß die Übergangsraten für die durch das Strahlungsfeld induzierten Übergänge proportional zur Strahlungsdichte sind, d.h.

$$\mathrm{d}W_a = b_n^m \rho(\omega, T)\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}W''_e = b_m^n \rho(\omega, T)\mathrm{d}t\,.$$

(a) Sei n_j die Anzahl der besetzten Zustände E_j zum Zeitpunkt t. Stellen Sie die Bedingung für Stationarität auf, d.h. dafür daß sich diese Besetzungszahlen durch die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld nicht mit der Zeit ändern ! Drücken Sie diese Bedingung durch die Größen n_j, a_j^k, b_j^k und $\rho(\omega, T)$ aus !

(b) Die Besetzungszahlen der Niveaus des Systems sind gegeben durch die *Boltzmann*-Verteilung

$$n_j \propto \mathrm{e}^{-\frac{E_j}{kT}}\,.$$

Setzen Sie dies in die Gleichgewichtsbedingung ein und leiten Sie durch Betrachtung des Grenzfalls $T \to \infty$ eine Beziehung zwischen den Koeffizienten b_n^m und b_m^n her !
Hinweis: Sie dürfen eingangs genannte Eigenschaften für die Asymptotik von $\rho(\omega, T)$ verwenden.

(c) Lösen Sie nun die Gleichgewichtsbedingung nach $\rho(\omega, T)$ auf und bestimmen Sie den dabei auftretenden energieabhängigen Koeffizienten durch Vergleich mit dem klassischen Grenzfall $kT \gg \hbar\omega$!

6 Zusatzpunkte