INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

1. Übungsblatt Abgabe am 3. November bis 14:00 bei A316/317

1. Wir wollen nun die Bohrsche Quantisierung des Wasserstoffatoms unter Berücksichtigung des Azimuthwinkels θ durchführen.

   (a) Die Hamilton-Funktion lautet in kartesischen Koordinaten

   $$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}$$

   (hier und im folgenden sei $r = |\vec{r}|$).
   Stellen Sie die Hamiltonfunktion in Kugelkoordinaten dar und verwenden Sie dabei p_r, p_θ und p_ϕ als die zu r, θ und ϕ kanonisch konjugierten Impulse !

   (b) Geben Sie einen vollständigen Satz von Erhaltungsgrößen an ! Welche Interpretation haben diese Erhaltungsgrößen ?
   Hinweis: Ein eleganter Weg verwendet die Hamilton-Jacobi Gleichung für die charakteristische Funktion W und löst diese durch den Separationsansatz $W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi)$.

   (c) Sei M^2 das Quadrat des Drehimpulses, M_z dessen Projektion auf die z-Achse und E die Gesamtenergie. Eliminieren Sie p_r, p_θ und p_ϕ zu Gunsten dieser Größen ! Welchen Wertebereich hat M_z relativ zu M ? Welchen Bereich in r, θ bzw. ϕ überstreichen die periodischen Bahnen ?

   (d) Führen Sie die Bohrsche Quantisierung für $J_i = \oint p_i \mathrm{d}q_i = \oint \frac{\partial W}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i$ durch, d.h. setzen Sie

   $$J_\phi = mh\,, \qquad J_\theta = kh\,, \qquad J_r = n'h \quad !$$

   Bestimmen Sie hieraus die Energieniveaus $E(n',k,m)$!
   Drücken Sie die etwas üblichere Hauptquantenzahl n und die Nebenquantenzahl l durch n', k und m aus, so daß die Energie E nur von n abhängt und M nur von l ! Diskutieren Sie, welche Werte für die Quantenzahlen n, l, m zugelassen sind !
   Hinweis: Folgende Integrale dürfen verwendet werden:

   $$\begin{aligned} \oint \mathrm{d}x\sqrt{A - \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2}} &= 2\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\sqrt{A - \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2}} = -2\pi\sqrt{C} + \frac{\pi B}{\sqrt{-A}} \\ \oint \mathrm{d}x\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin^2 x}} &= 2\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin^2 x}} = 2\pi(a - |b|)\,, \end{aligned}$$

   wobei $x_{1,2}$ jeweils die Nullstellen des Integranden sind.

   (e) Skizzieren Sie die zugelassenen Werte des Drehimpuls-Vektors $\vec{M}$ in der $x-z$ Ebene für die ersten drei erlaubten Werte von M !

10 Punkte

2. Die Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = c^2 \, \Delta \Psi(\vec{r}, t)$$

können als Fourier-Integral dargestellt werden:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3 k \, \hat{\Psi}(\vec{k}, t) \, \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, .$$

(a) Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt $\hat{\Psi}(\vec{k}, t)$ für festes $\vec{k}$? Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an !

(b) Schreiben Sie die Lösung für $\Psi(\vec{r}, t)$ aus Teil (a) als Funktion von $\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega_{\vec{k}} t$! Welche Beziehung besteht zwischen $\omega_{\vec{k}}$ und $\vec{k}$?

(c) Als Anfangsbedingung ist ein Gaußsches Wellenpaket gegeben

$$\Psi\left(\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t = 0\right) = \Psi_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha x^2/2} \, , \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, 0) = 0 \, .$$

Geben Sie die zugehörige Lösung $\Psi(\vec{r}, t)$ der dreidimensionalen Wellengleichung sowohl als Fourier-Integral sowie als explizite Funktion von $\vec{r}$ und t an !

6 Punkte