INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

Anwesenheitsübung zum 5. Übungsblatt keine Abgabe

A1. Zu einer Basis $|\,n\rangle$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ definieren wir die duale Basis $\langle m\,|$ so, daß bezüglich des Skalarprodukts $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ gilt:

$$\langle m\,|\,n\rangle = \delta_{m,n}\,. \tag{1}$$

Wir betrachten nun den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ und die Basis

$$|\,1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |\,2\rangle = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |\,3\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierzu die duale Basis $\langle 1\,|$, $\langle 2\,|$, $\langle 3\,|$ an, so daß (1) für das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^3$ erfüllt ist !

A2. Ein spezieller Hilbertraum ist der *Hilbert*sche Folgenraum $\ell^2$. Dieser ist definiert als die Menge aller Folgen $a_n$, $n \geq 1$, für die $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ endlich ist:

$$\ell^2 = \left\{ |\,\{a_n\}\rangle = |\,a_1, a_2, \ldots\rangle \quad \Big| \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Welche der folgenden Ausdrücke korrespondieren zu Elementen in $\ell^2$ ?

$|\,\alpha\rangle = |\,1, 1, \ldots\rangle$, $a_n = 1$; $|\,\beta\rangle = |\,3, 2, 1, 0, \ldots\rangle$, $a_n = 0$ für $n > 3$;

$|\,\gamma\rangle = |\,1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\rangle$, $a_n = \frac{1}{n}$; $|\,\delta\rangle = |\,1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots\rangle$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

A3. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertaum und $A$ ein Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$. Der Definitionsbereich des zu $A$ adjungierten Operators $A^\dagger$ ist definiert durch

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{|\,a\rangle \in \mathcal{H} \mid \exists\, |\,c\rangle \in \mathcal{H}, \forall\, |\,b\rangle \in \mathcal{D}(A),\ \langle a\,|\ A\,|\,b\rangle = \langle c\,|\,b\rangle\}\,.$$

Die Operation von $A^\dagger$ auf $\mathcal{D}(A^\dagger)$ ist dann gegeben durch $A^\dagger\,|\,a\rangle = |\,c\rangle$ (man schreibt auch $\langle a\ |\ A\ |\ b\rangle = \langle A^\dagger a\ |\ b\rangle$). Ist $\langle\cdot\ |\ \cdot\rangle$ das übliche Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen Vektorraum, so ist $A^\dagger$ das transponierte bzw. hermitesch konjugierte von $A$, wenn $A$ eine reelle bzw. komplexe Matrix ist.
Praktisch überlegt man sich häufig zuerst, wie die Operation von $A^\dagger$ aussehen könnte und dann (wenn erforderlich), wie der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^\dagger)$ zu wählen ist, wobei spezielle Eigenschaften von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{D}(A)$ zu verwenden sind.
Wir betrachten nun den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, d.h. die quadratintegrablen (komplexen) Funktionen mit einem reellen Argument, sowie das Skalarprodukt

$$\langle f\,|\,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f^\star(x)\, g(x)\,.$$

Gegeben sei ferner der Operator

$$A = x + i$$

mit dem Definitionsbereich ($\alpha > 0$)

$$D_\alpha(A) = \{f \in \mathcal{H} \mid f(x) = 0 \text{ für } |x| > \alpha\}\,.$$

Diskutieren Sie mögliche Definitionen des zu $A$ adjungierten Operators $A^\dagger$ mit passenden Definitionsbereichen $\mathcal{D}(A^\dagger)$ !