INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

1. Anwesenheitsübung

---

1. Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

   und wenden Sie auf dieses System die Bohrsche Quantisierungsregel an ! Berechnen Sie Energie, Periode und Amplitude der quantisierten Bahnen !

2. Führen Sie die Bohrsche Quantisierung für ebene Bahnen im Wasserstoff-Potential

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r}$$

   aus, d.h. nehmen Sie Kreisbahnen an und setzen Sie Zentrifugal-Kraft und Coulomb-Anziehung gleich !
   Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Elektrons auf der $n$ten Bahn und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lichtgeschwindigkeit c !
   Was folgt daraus für die Gültigkeit einer nicht-relativistischen Betrachtungsweise ?
   Hinweis: Die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ hat den Wert $\alpha \approx 1/137$.

3. Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion f ist in Dimension d definiert als

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \mathrm{d}^d x \, f(\vec{x}) \, \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} .$$

   Ferner ist die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g definiert über

$$(f * g)(\vec{y}) = \int \mathrm{d}^d x \, f(\vec{x}) \, g(\vec{y} - \vec{x}) .$$

   Nehmen Sie an, daß Sie Integrale und Ableitungen vertauschen dürfen und verifizieren Sie folgende Aussagen für $d = 1$:

   (a) Faltungssatz:
$$(\widehat{f * g})(k) = \sqrt{2\pi} \, \hat{f}(k) \, \hat{g}(k) .$$

   (b) Differentiationssatz:
$$(\widehat{x \, f})(k) = i(\hat{f})'(k) .$$

4. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{für } -2 \leq x \leq 0, \\ 2 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{für } |x| > 2, \end{cases}$$

   sowie $g * g$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases} \qquad !$$

   Interpretieren Sie das Ergebnis !

5. Die eindimensionale Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} \, .$$

Die Lösung kann als Fourier-Integral angesetzt werden

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \hat{n}(k,t) \, \mathrm{e}^{ikx} \, .$$

(a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Koeffizienten $\hat{n}(k,t)$? Geben Sie die allgemeinen Lösungen für $\hat{n}(k,t)$ an !

(b) Geben Sie die Lösung $n(x,t)$ der eindimensionalen Diffusionsgleichung zu den Anfangsbedingungen

$$n(x,0) = N \, \delta(x)$$

als Fourier-Integral an ! Führen Sie die k-Integration aus und stellen Sie das Endergebnis als Funktion von x dar !