



1. Wissensfragen (15 Punkte)

Wählen Sie genau fünf Fragen aus.

- (a) Geben Sie ein beliebiges Polynom dritten Grades an.
- (b) Was versteht man unter dem Begriff der Umkehrfunktion?
- (c) Wie lautet die Ableitung einer Umkehrfunktion?
- (d) Was ist eine Stammfunktion?
- (e) Geben Sie die Standard-Basis in drei Dimensionen an.
- (f) Wie berechnet man den Betrag einer komplexen Zahl?
- (g) Welche Eigenschaft kennzeichnet eine unitäre Matrix?
- (h) Welcher Typ von Differentialgleichung ist durch Separation der Variablen lösbar?

2. Differentiation und Integration (30 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{e^{\sin(2t)}}{2} + 1 \right], \quad \frac{d}{dt} \left[1 - \frac{\cos(t) \cdot \cosh(t)}{3} \right].$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral (durch partielle Integration)

$$\int \frac{4z^2 \cdot \sinh(z)}{3} dz.$$

(c) Berechnen Sie das bestimmte Integral (durch Substitution)

$$\int_0^1 \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

(d) Bestimmen Sie die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln(x \cdot y \cdot z).$$

3. Matrizen (20 Punkte)

Gegeben ist die Matrix und der Vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die adjungierte Matrix von A an. Ist A selbst-adjungiert?
- (b) Zeigen Sie, dass \vec{x}_1 ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert α_1 ?
- (c) Bestimmen Sie die anderen Eigenwerte von A .

Bitte wenden! →

4. **Taylor-Entwicklung (15 Punkte)**

Ein Teilchen befindet sich in dem Potential:

$$V(x) = -e^{-(x-\mu)^2}.$$

Approximieren Sie das Potential in der Nähe des Minimums $x_0 = \mu$. Ihre Approximation soll über eine Konstante hinausgehen.

5. **Differentialgleichungen (20 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit eines Teilchens:

$$\frac{d}{dt}v(t) = -3v(t) + e^{-2t}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die homogene Gleichung durch $v(t) = Ce^{-3t}$ gelöst wird.
- (b) Mit Hilfe welcher Methode lässt sich die inhomogene Gleichung lösen?
- (c) Lösen Sie die inhomogene Gleichung für die Anfangsbedingung $v(0) = 1$.