Zusammenfassung Orthogonale Polynome

Polynome	Symbol	Intervall	$\varrho(x)$	c_n	Erzeugende Funktion $f(x,u)$
Legendre	$P_n(x)$	$[-1,1]$	1	$\frac{2}{2n+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$
Hermite	$H_n(x)$	$[-\infty,\infty]$	e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}2^n n!$	e^{-u^2+2ux}
Laguerre	$L_n(x)$	$[0,\infty]$	$x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$	$\frac{\mathrm{e}^{ux/u-1)}}{(1-u)^{1+\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)u^n$
Tschebyscheff	$T_n(x)$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}(1-\delta_{n0})$	$\frac{1-u^2}{1-2xu+u^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)u^n$

Das Intervall $[a,b]$ gibt den Integrationsbereich des Skalarprodunkts an, $\varrho(x)$ ist die Gewichtsfunktion. Alle Polynome erfüllen die Orthogonalitäts- bzw. Normierungsrelation

$$\int_a^b Q_n(x)Q_m(x)\varrho(x)\mathrm{d}x = c_n\delta_{nm}$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\delta(x-x') = \sum_n \frac{1}{n} Q_n(x)Q_n(x') \;.$$

Aus der jeweiligen Erzeugenden Funktion können durch Taylorentwicklung

$$f(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^n f(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} Q_n(x)$$

die Polynome $Q_n(x)$ berechnet werden. Weiterhin sind die Polynome jeweils Lösungen einer Differentialgleichung, und es existieren Rekursionsrelationen sowie Rodrigues-Formeln. Genaueres dazu findet man z.B. in der unten angegebenen Literatur.

Literatur

[1] Karbach, M.: *Mathematische Methoden der Physik.* `http://wptl12.physik.uni-wuppertal.de/`

[2] Junghanns, P.: *Orthogonale Polynome I.* `http://www-user.tu-chemnitz.de/ peju/`

[3] Junghanns, P.: *Orthogonale Polynome II.* `http://www-user.tu-chemnitz.de/ peju/`