INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

Mathematische Methoden der Physik — SS 2003

11. Übungsblatt — Abgabe: 16.6.2003

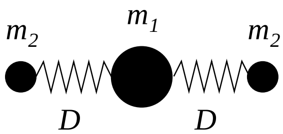
**Fragen und Probleme:** T. Bagdonat, Raum A317, Tel.: 391-5187, t.bagdonat@tu-bs.de
**Ein Link zu dieser Vorlesung:** `http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu`

43. **Eigenwerte einer Matrix**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

44. **Eigenschwingungen eines dreiatomigen Moleküls**




Es sollen die "Eigenschwingungen" des oben gezeigten dreiatomigen Moleküls bestimmt werden. Die Bewegung der drei Massen wird beschrieben durch das DGL-System

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= k_2(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= k_1(x_1 - x_2) + k_1(x_3 - x_2) \\ \ddot{x}_3 &= k_2(x_2 - x_3) \quad , \end{aligned}$$

wobei die $x_i$ die Auslenkungen aus den Ruhelagen sind und $k_i = D/m_i$ ist.

(a) Dieses DGL-System läßt sich mit dem Ansatz

$$\underline{x} = \hat{\underline{x}} e^{\lambda t} \quad , \quad \underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

lösen. Es ergibt sich ein Eigenwertproblem mit drei verschiedenen Lösungen für $\lambda^2$, die die sogenannten "Eigenschwingungen" oder "Eigenmoden" des Moleküls beschreiben. Bestimmen Sie diese drei Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\hat{\underline{x}}$. Geben Sie die vollständige, allgemeine Lösung des DGL-Systems an.

(b) Aus den Eigenvektoren $\hat{\underline{x}}$ kann man die "Form" der zugehörigen Schwingung ablesen. Skizzieren Sie diese für alle drei Eigenmoden.

45. **Hermitesche Polynome**

Die Hermiteschen Polynome $H_k(x)$ sind definiert durch die Beziehung

$$H_k(x) = (-1)^k \, e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \quad .$$

(a) Bestimmen Sie aus obiger Formel die ersten vier Hermiteschen Polynome $H_0(x), \dots, H_3(x)$.

(b) Diese Polynome $H_k(x)$ ergeben sich auch als spezielle Lösung der DGL

$$y'' - 2xy' + 2ky = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Diese DGL soll mit einem Potenzreihenansatz gelöst werden. Leiten Sie für die Koeffizienten $a_n$ die entsprechende Rekursionsformel ab.

(c) Die so gewonnene Rekursionsformel hat die Form $a_{n+2} = f(n)a_n$, d.h. es gibt zwei frei wählbare Parameter, $a_0$ und $a_1$. Es sollen die Lösungen bestimmt werden, die endliche Polynome darstellen. Dazu muß die Reihe irgendwo abbrechen. Für ein bestimmtes $k$ muß jeweils einer der beiden Parameter null sein. Bestimmen Sie so die endlichen Polynomlösungen $p_0(x), \dots, p_3(x)$ bis zum Grad 3 in $x$ und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus (a).