INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — SS 2003

10. Übungsblatt — Abgabe: 9.7.2003

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, Raum A317, Tel.: 391-5187, t.bagdonat@tu-bs.de
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu`

40. **Ein paar DGLn**

Lösen Sie folgende DGLn:

(a) $y' = xy^{1/3}$

(b) $y' = \dfrac{x-y-3}{x+y-1}$

(c) $y' + 2xy = 4x$

(d) $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = 0$

41. **Der harmonische Oszillator**

Der gedämpfte harmonische Oszillator wird durch die lineare DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

beschrieben*, wobei 2γ die Dämpfung beschreibt und ω_0 die Eigenfrequenz des Oszillators darstellt. $F(t)$ beschreibt den Einfluss durch eine äußere Kraft. Als Anfangsbedingung (für alle Aufgabenteile) gelte

$$x(0) = \hat{x} \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = \hat{v} \quad .$$

(a) Man löse zunächst die DGL für eine freie Schwingung ($F(t) = 0$) mit obigen Anfangsbedinungen mit Hilfe des $\exp(\lambda t)$-Ansatzes. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

- "Schwingfall": $\omega_0^2 > \gamma^2$.
- "Kriechfall": $\omega_0^2 < \gamma^2$.
- "aperiodischer Grenzfall": $\omega_0^2 = \gamma^2$.

Bestimmen Sie für alle drei Fälle die Lösung der DGL. Ersetzen Sie auftretende komplexe exp-Funktionen durch trigonometrische Funktionen.

(b) Die "erzwungene Schwingung" wird durch eine äußere Kraft der Form

$$F(t) = \hat{A}\sin(\Omega t) \quad \text{für } t > 0$$

beschrieben. Lösen Sie die DGL für diesen Fall (mit denselben Anfangsbedingungen) mit Hilfe der Laplacetransformation. Dazu werden beide Seiten der DGL Laplacetransformiert, und die entstehende algebraische Gleichung nach $X(\omega)$ (Laplacetransformierte der gesuchten Lösung) aufgelöst. $x(t)$ bestimmt man dann durch die Rücktransformation. Die Lösung zerfällt in zwei Teile, den homogenen Anteil (der identisch mit der Lösung aus (a) ist, und nicht nochmals berechnet zu werden braucht), und die partikuläre Lösung. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung durch die Rücktransformation des entsprechenden Anteils von $X(\omega)$.

*Die Punkte bedeuten erste bzw. zweite Ableitung nach der Zeit t

(c) Bringen Sie die so erhaltene Lösung auf die Form

$$x(t) = e^{-\gamma t} x_{\text{ein}}(t) + \hat{P} \sin(\Omega t + \varphi) \quad .$$

Der exponentiell gedämpfte Teil $x_{\text{ein}}(t)$ beschreibt den “Einschwingvorgang”. Für große Zeiten bleibt nur die Schwingung mit der Erregerfrequenz Ω übrig. Der Oszillator schwingt mit der ihm aufgeprägten Frequenz Ω, jedoch um φ phasenverschoben zum Erreger. Bestimmen Sie $\hat{P}$ und φ als Funktion von Ω.

(d) Bestimmen Sie das Maximum von $\hat{P}$ (die “Resonanzfrequenz”) und skizzieren Sie den Verlauf von $\hat{P}(\Omega)$ und $\varphi(\Omega)$.

42. **Keplerproblem**

Das “Keplerproblem” bezieht sich auf die Bewegung der Himmelskörper unter dem gravitativen Einfluss der Sonne. Diese Bewegung wird beschrieben durch die DGL (Energieerhaltungssatz)

$$\frac{m}{2} \left(d_t \varrho(t)\right)^2 + \frac{L^2}{2m\varrho(t)^2} - \gamma \frac{mM}{\varrho(t)} = U \quad ,$$

wobei $\varrho(t)$ den Abstand des Körpers von der Sonne, L dessen Drehimpuls, m seine Masse und U seine Gesamtenergie bezeichnet. γ ist die Newtonsche Gravitationskonstante und M die Masse der Sonne.

Die Lösung dieser DGL für $\varrho(t)$ ist nicht geschlossen angebbar. Man kann die DGL aber für $\varrho(\varphi)$ lösen, also den Abstand als Funktion vom Polarwinkel φ und damit die Form der Bahnkurve bestimmen.

(a) Substituieren Sie dazu in der Ausgangsdifferentialgleichung

$$s(\varphi) = \frac{1}{\varrho(\varphi)} \quad .$$

Zeigen Sie, daß dies auf die DGL

$$d_\varphi^2 s + s = \frac{1}{k} \quad \text{mit} \quad k = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}$$

führt. Dazu benötigt man die zusätzliche Beziehung (Drehimpulserhaltungssatz)

$$d_t \varphi = \frac{L}{m\varrho^2} \quad .$$

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der so erhaltenen DGL an.

(c) Eine der zwei auftretenden Integrationskonstanten kann man aus der willkürlichen Wahl des Nullpunkts für φ bestimmen. Dieser soll so gewählt sein, daß der sonnennächste Punkt (das Perihel) bei $\varphi = 0$ liegen soll. Man beachte: Im Perihel ist $\varrho(\varphi)$ am kleinsten, und damit $s(\varphi)$ am größten.

(d) Zeigen Sie, daß damit die endgültige Lösung für $\varrho(\varphi)$ die Form

$$\varrho(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

annimmt. Skizzieren Sie die Bahnkurven für die Fälle $\varepsilon = 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$. Um was für geometrische Formen handelt es sich jeweils?