INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK SS 2003

8. Übungsblatt Abgabe: 23.6.2003

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, Raum A317, Tel.: 391-5187, t.bagdonat@tu-bs.de
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu`

34. **Symmetrischer und antisymmetrischer Tensor**

S_{ab} und A_{ab} seien die kovarianten Komponenten zweier Tensoren 2. Stufe. Es gelte $S_{ab} = S_{ba}$ (symmetrischer Tensor) und $A_{ab} = -A_{ba}$ (antisymmetrischer Tensor).

(a) Zeigen Sie, daß dann für die kontravarianten Komponenten auch

$$S^{ab} = S^{ba} \quad \text{und} \quad A^{ab} = -A^{ba}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie weiterhin, daß

$$S_{ab}A^{ba} = 0 \quad .$$

35. **Kovariante Ableitung**

Für eine skalare Funktion f transformieren sich die Komponenten des Gradienten $\partial_{\xi^a} f$ wie die kovarianten Komponenten eines Tensors 1. Stufe. Ist f jedoch ein Tensor höherer Ordnung, so ergibt das partielle Ableiten i.a. nicht wieder einen Tensor.

(a) A^b seien die kontravarianten Komponenten eines Tensors 1. Stufe. Zeigen Sie zunächst, daß

$$\partial_{\xi^a} A^b$$

kein Tensor 2. Stufe ist!

(b) Man kann aber eine sogenannte "kovariante Ableitung"

$$D_{\xi^a} A^b = \partial_{\xi^a} A^b + \Gamma^b_{ac} A^c$$

einführen, die sich tatsächlich tensoriell verhält. Die sogenannten "Christoffelsymbole" Γ sind dabei gegeben durch

$$\Gamma^b_{ac} = \frac{1}{2} g^{bs} \left(\partial_{\xi^a} g_{cs} + \partial_{\xi^c} g_{as} - \partial_{\xi^s} g_{ca} \right) \quad .$$

Sie transformieren sich selbst *nicht* wie ein Tensor. Leiten Sie für das folgende zunächst die Darstellung

$$\Gamma^b_{ac} = \underline{b}^b \cdot \partial_{\xi^a} \underline{b}_c$$

ab.

(c) Zeigen Sie nun mit der oben abgeleiteten Beziehung, daß sich $D_{\xi^a} A^b$ tatsächlich wie die Komponenten eines Tensors 2. Stufe transformiert.

36. **Transformationsverhalten der Divergenz**

A^a seien die kontravarianten Komponenten eines Tensors 1. Stufe.

(a) Zeigen Sie, daß sich die Größe

$$\partial_{\xi^a} A^a$$

nicht wie ein Tensor 0. Stufe transformiert.

(b) Verwenden Sie die Beziehung

$$\partial_{\xi^a} J = -J\, J^c_{b'} \left(\partial_{\xi^a} J^{b'}_c \right) \quad ,$$

um zu zeigen, daß die Divergenz

$$\operatorname{div} \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\xi^a} \left(\sqrt{g} A^a \right)$$

tatsächlich ein Tensor 0. Stufe ist. $J^b_{a'}$ sei, wie in der VL, die Jacobimatrix einer Koordinatentransformation, $J^{b'}_a$ deren Inverses, sowie J deren Determinante.