INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — SS 2003

5. Übungsblatt — Abgabe: 26.5.2003

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, Raum A317, Tel.: 391-5187, t.bagdonat@tu-bs.de
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu`

26. **Integralsatz von Stokes**

    Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

    $$\underline{A} = \left(\left(x^1\right)^3 + x^2\left(x^3\right)^2/2, x^1\left(x^3\right)^2/2 + \left(x^2\right)^2, x^1x^1x^3\right)^T \quad .$$

    Als Fläche verwende man die obere Halbkugel

    $$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = 1 \quad x^3 > 0 \quad .$$

27. **Integralsatz von Gauß**

    Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld

    $$\underline{A} = \left(\left(x^1\right)^2 + x^1x^3, 2\left(x^2\right)^2, -\left(x^3\right)^2/2\right)^T \quad .$$

    Das Integrationsvolumen sei der Quader, der durch

    $$0 \leq x^1 \leq 2, \quad 0 \leq x^2 \leq 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2$$

    gegeben ist.

28. **Flächenberechnung mit dem Stokesschen Satz**

    Zeigen Sie, daß von der Kurve $C : x^1(t), x^2(t), x^3 = 0$ (die in der x^1x^2-Ebene liegt) die Fläche

    $$F = \oint_C \underline{A} \cdot d\underline{s} \quad \text{mit } \underline{A} = \left(-x^2/2, x^1/2, 0\right)$$

    umschlossen wird. Bestimmen Sie damit die umschlossenen Flächen von

    (a) der Kardioide aus Aufgabe 13 ($r = \cos^2(\varphi/2)$).

    (b) der Kurve, die durch $x^1 = \cos\varphi$, $x^2 = \sin 2\varphi$, $\varphi = 0 \ldots 2\pi$ gegeben ist.

29. **Elektrisches Feld einer Punktladung**

    Das elektrische Feld $\underline{E}$ einer Punktladung q ist gegeben durch

    $$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3} \quad ,$$

    wobei ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist.

    Es soll der Integralsatz von Gauß für dieses Feld überprüft werden.

(a) Bestimmen Sie zunächst das Oberflächenintegral

$$\iint_{(V)} \underline{E} \cdot d\underline{O}$$

über eine Kugel mit Radius R.

(b) Berechnen Sie dann die Divergenz von $\underline{E}$ für $r > 0$.

(c) Zeigen Sie, daß durch

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} q \delta^3(\underline{r})$$

der Gaußsche Satz erfüllt wird.