INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — SS 2003

4. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 12.5.03 in der VL

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, Raum A317, Tel.: 391-5187, t.bagdonat@tu-bs.de
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu`

19. **Analytische Funktionen**

    Prüfen Sie, ob folgende Funktionen analytisch sind:

    (a) $\exp(iz)$ (b) $\sin(z)$ (c) $\cos(\overline{z})$

20. **Cauchyscher Integralsatz**

    Prüfen Sie den Cauchyschen Integralsatz, indem sie explizit

    $$\oint \left(5z^3 - 3z + 1\right) dz$$

    entlang des Kreises mit $|z| = 1$ und entlang des quadratischen Weges mit den Eckpunkten $0, 1, 1+i, i$ berechnen.

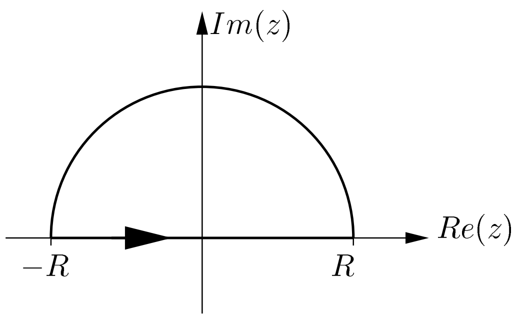
21. **Berechnung bestimmer Integrale mit der Cauchyschen Integralformel**

    Man kann die Cauchysche Integralformel verwenden um bestimmte Integrale zu berechnen. Als Beispiel soll dieses Verfahren auf

    $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}$$

    angewandt werden.

    Dazu berechne man das entsprechende Integral im Komplexen mittels der Cauchyschen Integralformel längs des skizzierten Weges für große R. Man zeige, daß im Fall $R \to \infty$ der Beitrag des Halbkreises verschwindet, und man somit obiges Integral bestimmt hat.



22. **Gradient einer skalaren Funktion**

    Skizzieren Sie für $\Phi(x, y) = xy$ die Isolinien von Φ sowie das Vektorfeld $\operatorname{grad}\Phi$. Warum hat $\operatorname{grad}\Phi$ im Nullpunkt keine Quelle?

23. **Rotation und Divergenz**

    Skizzieren Sie die Vektorfelder

(a) $\underline{f} = (x, y)^T$

(b) $\underline{f} = (-y, x)^T$

(c) $\underline{f} = \frac{1}{r^2}(x, y)^T$

(d) $\underline{f} = \frac{1}{r^2}(-y, x)^T$

(mit $r^2 = x^2 + y^2$) und berechnen Sie für $r > 0$ jeweils die Rotation und Divergenz. Begründen Sie die unterschiedlichen Ergebnisse für die Divergenz im Fall (a) und (c).

24. **Divergenz eines Vektorprodukts**

Zeigen Sie mit Hilfe der Indexschreibweise, daß

$$\mathrm{div}\,(\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\mathrm{rot}\,\underline{A}) - \underline{A} \cdot (\mathrm{rot}\,\underline{B}) \quad .$$

25. **Quellenfreies Feld**

Eine wichtige Eigenschaft des Magnetfeldes ist, daß es keine Quellen hat, also $\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$ gilt. Zeigen Sie, daß diese Bedingung für ein beliebiges Vektorfeld $\underline{A}$ durch den Ansatz

$$\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$$

immer erfüllt wird. Zeigen Sie weiterhin, daß ein anderes Vektorfeld

$$\underline{A}' = \underline{A} + \mathrm{grad}\,\Phi$$

für eine beliebige Funktion Φ dasselbe Feld $\underline{B}$ liefert.