Tensoren

- Koordinatentransformation

$$\text{KS} \qquad \leftrightarrow \qquad \text{KS}'$$

$$\xi^a = \xi^a\left(\xi^{b'}\right) \qquad \xi^{a'} = \xi^{a'}\left(\xi^b\right)$$

- Jacobi-Matrix

$$J^a_{b'} = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{b'}} \quad , \quad J^{a'}_b = \frac{\partial \xi^{a'}}{\partial \xi^b} \quad , \quad J^a_{b'} J^{b'}_c = \delta^a_c$$

- Jacobi-Determinante

$$J = \det\left(J^a_{b'}\right) = \varepsilon_{abc} J^a_{1'} J^b_{2'} J^c_{3'}$$

- Tensor 0. Stufe

$$S = S'$$

- Tensor 1. Stufe

$$v^{a'} = J^{a'}_b v^b \quad , \quad v_{a'} = J^b_{a'} v_b$$

- Tensor 2. Stufe

$$T^{a'b'} = J^{a'}_c J^{b'}_d T^{cd} \quad , \quad T_{a'b'} = J^c_{a'} J^d_{b'} T_{cd}$$

Tensoroperationen

- Überschiebung

$$T^{ab}{}_c S_b{}^{cd} = Q^{ad}$$

- Indexziehen (Spezialfall der Überschiebung)

$$v_a = g_{ab} v^b \quad , \quad v^a = g^{ab} v_b$$

- Quotientensatz

$$v^a w_a = S \quad ,$$

  wenn v^a kontravariante Komponenten eines Tensors 1. Stufe und S Tensor 0. Stufe, dann w_a kovariante Komponenten eines Tensors 1. Stufe.

- Spur eines Produkts

$$S_{cd} a^{dc} = 0 \quad ,$$

  wenn $S_{cd} = S_{dc}$ und $a^{cd} = -a^{dc}$.

Beispiele

- Metrische Fundamentalgleichung $ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b$
  - ds Tensor 0. Stufe
  - g_{ab} Tensorkomponenten 2. Stufe
  - $d\xi^a$ Tensorkomponenten 1. Stufe
- Gradient
$$\mathrm{grad} f = \underline{b}^a \partial_{\xi^a} f$$
  $\partial_{\xi^a} f$ kovariante Komponenten eines Tensors 1. Stufe
- Divergenz
$$\mathrm{div} \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\xi^a} \left(\sqrt{g} A^a \right)$$
  Tensor 0. Stufe
- Jacobi-Determinante
$$g = \det \left(J^a_{b'} \right)$$
  i.a. kein Tensor
- "Ortsvektor"
$$\underline{r} = \left(\xi^1, \xi^2, \xi^3 \right)$$
  i.a. kein Tensor
- Differentieller Ortsvektor
$$d\underline{r} = \underline{b}_a d\xi^a$$
  Tensor 1. Stufe, $d\xi^a$ kontravariante Komponenten
- Volumenelement
$$dV = \sqrt{g}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$
  Tensor 0. Stufe
- Transformation des Voluemenelements
$$\begin{aligned} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 &= J\, d\xi^{1'} d\xi^{2'} d\xi^{3'} \\ g &= \frac{1}{J^2} g' \end{aligned}$$
$$\Rightarrow dV = \sqrt{g}\, d\xi^d \xi^2 d\xi^3 = \sqrt{g'}\, d\xi^{1'} d\xi^{2'} d\xi^{3'} = dV'$$
  $\Rightarrow dV$ ist Tensor 0. Stufe