INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK SS 2011

14. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 11. Juli bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

35. **Satz von Liouville** **(5 Punkte)**

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens. Der Ort x und der Impuls p des Teilchens entspricht einem Punkt im Phasenraum. Wir betrachten nun dieses Teilchen wiederholt unter leicht veränderten Anfangsbedingungen. Diese seien gleichmäßig verteilt im Bereich $0 \leq x \leq x_{max}$ und $0 \leq p \leq p_{max}$.

Berechnen und Skizzieren Sie, wie sich die Grenzen des besetzten Phasenraumbereichs im Laufe der Zeit verschieben. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Phasenraumbereichs und die Dichte der Punkte konstant ist. Betrachten Sie hierzu

(a) kräftefreie Teilchen

(b) Teilchen im Schwerefeld $\underline{g} = g\underline{e}_x$.

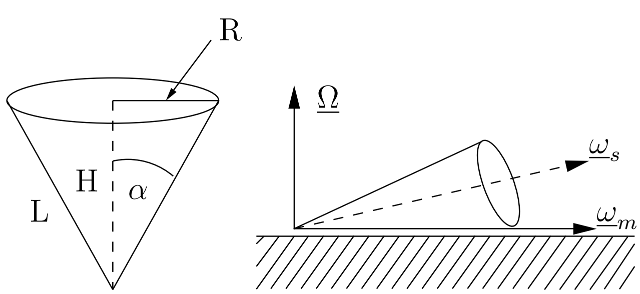
36. **Trägheitstensor: Inhomogene Kugel** **(5 Punkte)**

Berechnen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitstensor für eine Kugel mit Radius R und der Massendichte

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\cos\vartheta + \beta\cos^2\vartheta)$$

in Kugelkoordinaten r, φ, ϑ mit $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

37. **Rollender Kegel** **(10 Punkte)**



Gegeben sei ein Kegel mit halbem Öffnungswinkel α, Radius R, Höhe H und Masse M.

(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor und die Rotationsenergie T_{rot} des Kegels bei Rotation mit ω_m um eine Seitenkante.

Bitte wenden ⟶

(b) Wir betrachten nun die Situation, dass der Kegel ohne zu rutschen auf der Ebene rollt. Anstatt die Seitenkante als momentane Drehachse $\underline{\omega}_m$ zu betrachten, kann man das Abrollen des Kegels auch als Drehung mit Winkelgeschwindigkeit $\underline{\Omega}$ um die Spitze des Kegels plus Drehung mit Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}_s$ um die Symmetrieachse auffassen. Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) dann umformen lässt zu

$$T_{rot} = \frac{3}{10}\frac{H^2}{R^2}\Omega^2 M \sin^2\alpha \left(\frac{3}{2}H^2 + \frac{R^2}{4}\right) \quad .$$

(c) Man betrachte nun eine um den Winkel γ geneigte schiefe Ebene, auf der sich der Kegel (wiederum ohne zu rutschen) abrollt. Die Spitze des Kegels kann sich wegen der Abrollbedingung nicht bewegen. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion sowie die Bewegungsgleichungen und leiten Sie daraus die Schwingungsfrequenz für kleine Schwingungen um die Ruhelage ab.

Hinweise: Zur Bestimmung der potentiellen Energie könnten Sie die Projektion P des Schwerpunktes auf die Seitenkante des Kegels betrachten. Die potentielle Energie des Schwerpunkts unterscheidet sich von der des Punktes P dann nur um eine Konstante, die für die Lösung des Problems unerheblich ist. Als generalisierte Koordinate eignet sich Φ mit $\dot{\Phi} = \Omega$.