INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

13. Übungsblatt Abgabe: Mo., 4. Juli bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

32. **Kanonische Transformation** **(6 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 & q_1' &= q_1 - p_1 \\ p_2' &= p_2 & q_2' &= q_2 - p_2 \\ p_3' &= p_3 & q_3' &= q_3 - p_3 \end{aligned}$$

kanonisch ist. Sie dürfen dabei annehmen, dass $\mathcal{H}$ nicht explizit zeitabhängig ist.

(b) Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \quad .$$

Transformieren Sie die Koordinaten q, p in die neuen Koordinaten q', p' mittels einer kanonischen Transformation, deren Erzeugende durch

$$R = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot q'$$

gegeben ist. Geben Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'(q', p')$ an und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in diesen neuen Koordinaten. Transformieren Sie danach die Lösung wieder auf die alten Koordinaten q und p.

33. **Bewegung im Zentralkraftfeld** **(11 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten die Hamiltonsche Funktion für die Bewegung in einem Zentralkraftfeld mit dem Potential $V(r)$ die Form

$$\mathcal{H}(r,\vartheta,\varphi,p_r,p_\vartheta,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) + V(r)$$

hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung und dem Separationsansatz

$$S = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + W_\varphi(\varphi) - Ut \quad ,$$

dass drei Konstanten

$$a_\varphi = p_\varphi, \quad a_\vartheta = \sqrt{p_\vartheta^2 + \frac{a_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{a_\vartheta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

der Bewegung existieren.

Bitte wenden ⟶

(c) Erläutern Sie die anschauliche Bedeutung der Konstanten. Betrachten Sie dazu den Drehimpuls.

(d) Im Folgenden betrachten wir den Fall $\vartheta = const$, also eine ebene Bewegung im Zentralfeld. Geben Sie die Wirkungsfunktion S an. Bestimmen Sie daraus die Bahnkurve in der Form $\varphi = \varphi(r)$ und $t = t(r)$.

34. **Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung** **(3 Punkte)**

(a) Berechnen Sie mit der Lösung aus Aufgabe 32 für den eindimensionalen harmonischen Oszillator die Phasenraumintegrale

$$J = \oint p dq \quad \text{und} \quad J' = \oint p' dq'$$

über eine volle Periode. Dass beide Integrale denselben Wert ergeben ist kein Zufall, sondern eine fundamentale Aussage: Das Phasenraumintegral $\int pdq$ ist invariant unter kanonischer Transformation.

(b) Die sogenannte Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung besagt, dass für periodische Bewegungen $J = nh$ gilt, wobei h das Planksche Wirkunsquantum und n eine positive, ganze Zahl ist. Zeigen Sie, dass demzufolge für die "gequantelten" Energiewerte des harmonischen Oszillators

$$U_n = n\frac{h}{2\pi}\omega = n\hbar\omega$$

gilt.

Anmerkung: Dieselbe Überlegung angewandt auf das Keplerproblem führt auf die Energiequantisierung des Wasserstoffatoms, mit dem Bohr die Spektrallinien des Wasserstoffs erfolgreich erklären konnte (Bohrsches Atommodell).