INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

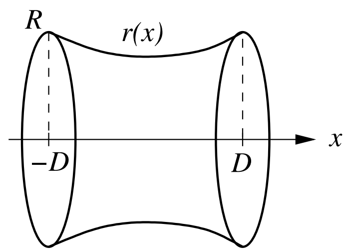
Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK SS 2011

12. Übungsblatt Abgabe: Mo., 27. Juni bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

28. **Variationsrechnung - Minimale Oberfläche** **(4 Punkte)**



Zwei Kreisringe mit Radius R und Abstand $2D$ sind durch eine Seifenhaut verbunden. Die Form $r(x)$ dieser Haut stellt sich so ein, dass die Oberfläche minimal wird.

(a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Minimierung der Oberfläche der Minimierung des Funktionals

$$S = 2\pi \int_{-D}^{+D} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

entspricht.

(b) Bestimmen Sie die Eulerschen Gleichungen für dieses Variationsproblem (die Langrange-Gleichungen 2. Art).

(c) Zeigen Sie, dass

$$r(x) = a \cosh(x/a)$$

diese Gleichungen löst.

29. **Teilchen im elektromagnetischen Feld** **(4 Punkte)**

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens im Potential $V(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)$.

(a) Zeigen Sie, dass sich in kartesischen Koordinaten die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_k = Q_k$$

mit der verallgemeinerten Kraft

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_k}$$

ergeben.

Bitte wenden ⟶

Für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld lautet das Potential nun

$$V(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = q\phi(\underline{x}, t) - q\underline{A}(\underline{x}, t) \cdot \dot{\underline{x}} \quad .$$

In der Elektrodynamik werden wir zeigen, dass wir die elektrische Feldstärke $\underline{E}$ und die magnetische Induktion $\underline{B}$ aus dem skalaren Potential $\Phi(\underline{x}, t)$ und dem Vektorpotential $\underline{A}(\underline{x}, t)$ ableiten können gemäß

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{x}, t) &= -\nabla\phi(\underline{x}, t) - \frac{\partial \underline{A}(\underline{x}, t)}{\partial t} \\ \underline{B}(\underline{x}, t) &= \nabla \times \underline{A}(\underline{x}, t) \quad . \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die verallgemeinerte Kraft Q_k auf die Lorentzkraft führt (Beachten Sie die Kettenregel).

(c) Geben Sie die Lagrange- und die Hamiltonfunktion an.

30. **Hamiltonsche Bewegungsgleichungen** **(7 Punkte)**

Bestimmen Sie für die Bewegung längs der Kurve $x_1^2 + ax_2^3 = 0$ aus Aufgabe 21 die Hamiltonsche Funktion $\mathcal{H}$ und geben Sie die Hamiltonschen Gleichungen an. Als generalisierte Koordinate verwende man x_2. Reproduzieren Sie daraus die bereits bekannte Bewegungsgleichung für x_2.

31. **Poissonklammern** **(5 Punkte)**

$\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ sei der dreidimensionale Drehimpulsvektor. (q_1, q_2, q_3) ist der kartesische Ortsvektor und (p_1, p_2, p_3) der kanonisch konjugierte Impulsvektor. A, B und C seien beliebige skalare Funktionen der q_α und p_α. Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Poissonklammern:

(a) $\{A, B\} = -\{B, A\}$

(b) $\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B$

(c) $\{q_1, L_2\} = q_3$

(d) $\{p_1, L_2\} = p_3$