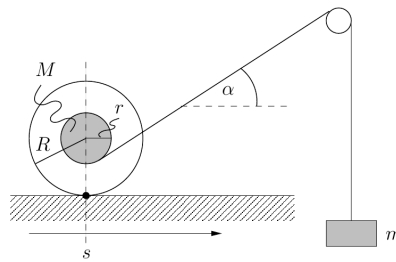




25. Die Garnrolle

(6 Punkte)

Man bestimme die Bewegungsgleichung für eine Garnrolle (s. Skizze). Die Garnrolle besteht aus zwei Scheiben mit Radius R und vernachlässigbarer Masse und einem inneren Zylinder mit Radius r und Masse M , auf dem ein Faden aufgewickelt wird. Die äußeren Scheiben rollen reibungsfrei auf einer Unterlage, ohne zu Rutschen, d.h. der Gleitreibungswiderstand ist unendlich groß, der Rollreibungswiderstand sei vernachlässigbar. Es wirkt eine beschleunigende Kraft, die von dem Gewicht der Masse m ausgeübt wird. Der in der Skizze eingezeichnete Winkel α sei als konstant angenommen (das gilt näherungsweise, wenn die Länge des abgerollten Fadens bis zur Umlenkrolle sehr groß ist gegenüber dem Radius R).



- (a) Geben Sie die Lagrangefunktion des Gesamtsystems als Funktion der generalisierten Koordinate s (Position der Garnrolle) an.

Hinweise: Die Höhenänderung der Masse m wird durch Translation und Drehung der Garnrolle verursacht. Zudem ist die Rotationsenergie der Rolle durch $T_{rot} = 1/2 \Theta \dot{\varphi}^2$ mit $\Theta = 1/2 M r^2$ gegeben.

- (b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für s ab.
(c) Die Rolle sei zu Beginn des Vorgangs in Ruhe ($s(0) = 0$). Für kleine Winkel α würde die Rolle nach rechts loslaufen, während sie für große α nach links läuft. Bestimmen Sie den Grenzwinkel α_c .

26. Foucaultsches Pendel

(11 Punkte)

Bei einem (gut gelagerten) Pendel dreht sich die Schwingungsebene aufgrund der Erdrotation (Foucaultsches Pendel). Diese Bewegung soll genauer untersucht werden. Dazu sei ein Koordinatensystem eingeführt, dessen z -Achse zum Erdmittelpunkt zeigt und dessen Ursprung im Pendelaufhängpunkt liegt. Die Rotation des Ursprungs um den Erdmittelpunkt kann außer acht gelassen werden ($\underline{v}_{tr} = 0$). Das System rotiert aber in sich mit $\underline{\omega} = (\omega_1, 0, \omega_3)$. Die Gravitationskraft wirkt in positive z -Richtung, also ist $V = -mgz$. Unter Vernachlässigung der quadratischen Terme in $\underline{\omega}$ ergibt sich die Lagrange-Funktion im rotierendes KS als

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\underline{x}}^2 + m \dot{\underline{x}}(\underline{\omega} \times \underline{x}) + mgz \quad .$$

- (a) Führen Sie Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ein und entwickeln Sie $\mathcal{L}$ bis zur zweiten Ordnung in ϑ . Es gilt natürlich die Nebenbedingung $r = l$, wenn l die Länge des Pendels ist. Man beachte, daß im gewählten KS $\vartheta = 0$ der Ruhelage entspricht.
- (b) Zeigen Sie, daß sich die so erhaltene Lagrange-Funktion von

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{x}, \underline{\dot{x}}) = ml^2 \left(\frac{1}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \vartheta^2 \dot{\varphi}^2) + \omega_3 \vartheta^2 \dot{\varphi} - \frac{\Omega^2}{2} \vartheta^2 \right) \quad \text{mit} \quad \Omega^2 = \frac{g}{l}$$

nur um eine totale zeitliche Ableitung unterscheidet.

- (c) Zeigen Sie: Sind $\vartheta_0(t)$ und $\varphi_0(t)$ Lösungen der Lagrange-Gleichungen (von $\tilde{\mathcal{L}}$) für $\omega_3 = 0$, dann sind $\vartheta(t) = \vartheta_0(t)$ und $\varphi(t) = \varphi_0(t) - \omega_3 t$ Lösungen der Lagrange-Gleichungen für $\omega_3 \neq 0$ bis auf quadratische Terme in ω_3 .
- (d) Es verbleibt, die Lösungen ϑ_0 und φ_0 zu bestimmen. Durch die Substitutionen

$$\xi = \vartheta \cos \varphi \quad , \quad \eta = \vartheta \sin \varphi$$

vereinfacht sich $\tilde{\mathcal{L}}$ (mit $\omega_3 = 0$) erheblich. Bestimmen Sie daraus die Lösungen ϑ_0 und φ_0 für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\vartheta}(0) = 0$ und $\vartheta(0) = \theta$. Geben Sie dann die endgültigen Lösungen $\vartheta(t)$ und $\varphi(t)$ für $\omega_3 \neq 0$ an. Um wieviel Grad verdreht sich die Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels pro Stunde in Braunschweig?

27. Zyklische Koordinaten und Noethertheorem (3 + 5 Punkte)

Wir betrachten die Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen im $\mathbb{R}^3$ im konstanten, homogenen elektrischen Feld mit $\underline{E} = (E_x, E_y, 0)$,

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\dot{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 + q \underline{E} \cdot \underline{x} \quad .$$

- (a) Zeigen Sie, dass das System invariant unter der Transformation $z' = z + \epsilon$ mit $\epsilon = \text{const}$ ist.
- (b) Bestimmen Sie die zyklische Koordinate x_I und die zugehörige Erhaltungsgröße p_I .

Das Theorem von Emmy Noether verbindet nun Symmetrien des Systems mit den zugehörigen Erhaltungsgrößen: Sei $\mathcal{L}$ invariant unter der Gruppe der infinitesimalen Transformationen

$$x'_i = x_i + \epsilon \left. \frac{\partial x'_i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad ; \quad t' = t + \epsilon \phi_i(x, \dot{x}, t)$$

mit dem kontinuierlichen Parameter ϵ , so folgt daraus die Erhaltungsgröße

$$Q(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x'_i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \phi_i \quad .$$

Zusatzaufgabe: Finden Sie eine geeignete Parametrisierung für Drehungen um die z -Achse und zeigen Sie damit die Erhaltung der z -Komponente des Drehimpulses.