


21. D'Alembert und Zwangskräfte
(8 Punkte)

Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einfluß der Schwerkraft (in negativer x_2 Richtung) auf der Kurve $x_1^2 + ax_2^3 = 0$. Die Anfangsbedingungen seien $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = -v_0$ mit $v_0 > 0$.

- Stellen Sie mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips die Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2 in der Form $\ddot{x}_1 = f(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ und $\ddot{x}_2 = g(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ auf. Sie können dabei ganz analog zum Massenpunkt auf der schiefen Ebene vorgehen.
- Geben Sie die wirkende Zwangskraft als Funktion des Ortes und der Geschwindigkeit explizit an.
- Nehmen Sie an, dass während der gesamten Bewegung \dot{x}_2 , also die Geschwindigkeit in Fallrichtung, konstant bleibt. Lösen Sie für diesen Spezialfall die Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die Konstante a .

Hinweis: Sie könnten die Nebenbedingung verwenden, um aus der Differentialgleichung eine direkt integrierbare Gleichung zu erzeugen.

22. Ein Massenpunkt auf einer Kugel
(7 Punkte)

Ein Massenpunkt m soll sich unter dem Einfluss des homogenen Schwerfelds der Erde auf einer Kugeloberfläche vom Radius R bewegen. In welcher Höhe z_0 und mit welcher Geschwindigkeit v_0 springt der Massenpunkt von der Kugeloberfläche ab, wenn er sich anfangs im labilen Gleichgewicht befindet und dann eine infinitesimale Anfangsgeschwindigkeit erhält?

Hinweise: Bestimmen Sie zunächst die Zwangskraft und benutzen Sie dann die Energieerhaltung.

23. Lagrange-Gleichungen 1. Art (LI)
(5 Punkte)

Ein Massenpunkt bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Kurve $y(x) = \cosh(x) - 1$. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mithilfe der LI auf. Geben Sie auch die Zwangskraft explizit an. Die Bewegungsgleichungen sollen *nicht* gelöst werden.