



15. Periheldrehung

(8 Punkte)

Ein Planet der Masse m bewegt sich in einem zentralsymmetrischen Potential $V(\varrho)$, in dessen Ursprung die Sonne steht. Die Bewegung verläuft im Endlichen, es liegt also der „gebundene Fall“ vor.

- (a) Zeigen Sie, dass die Änderung des Polarwinkels φ zwischen sonnennächstem und sonnenfernstem Punkt ($\varrho_{\min}$ und $\varrho_{\max}$) gegeben ist durch

$$\Delta\varphi = -m \frac{\partial}{\partial L} \int_{\varrho_{\min}}^{\varrho_{\max}} \sqrt{\frac{2}{m}(U - V) - \frac{L^2}{m^2 \varrho^2}} d\varrho \quad .$$

- (b) Für den Fall $V(\varrho) = -\gamma m M / \varrho$ ergeben sich bekanntermaßen geschlossene Ellipsen, $\Delta\varphi$ ist demnach gerade π oder bei einem vollen Umlauf gerade 2π . Fügt man eine kleine, zentralsymmetrische Störung ins Potential ein

$$V(\varrho) = V_0(\varrho) + V_1(\varrho) = -\gamma \frac{mM}{\varrho} + V_1(\varrho) \quad , \quad V_1 \ll V_0 \quad ,$$

so beschreibt der Körper immer noch näherungsweise Ellipsen, deren Halbachsen sich jedoch bei jedem Umlauf nicht mehr nur um $2\Delta\varphi = 2\pi$, sondern um den Winkel $2\Delta\varphi = 2\pi + \delta\varphi$ verdrehen (Periheldrehung).

Bestimmen Sie die Periheldrehung, indem Sie die Wurzel gemäß $\sqrt{a+x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}x$ entwickeln. Sie sollten als Ergebnis

$$\Delta\varphi \approx \pi + m \frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{\rho^2}{L} V_1 d\varphi$$

erhalten.

- (c) Berechnen Sie die Periheldrehung konkret für ein Störpotential der Form $V_1(\varrho) = -\alpha/\varrho^2$.

Anmerkung: Solche Störterme treten in der Realität tatsächlich auf, z.B. durch die Abplattung der Sonne aufgrund ihrer Eigenrotation, durch die Gravitation von Jupiter oder auch durch allgemein relativistische Effekte. Wie man am Ergebnis sieht, ist die Periheldrehung umso größer, je kleiner die Masse des Planeten ist, daher wurde sie auch zuerst beim Merkur beobachtet und war eine der ersten experimentellen Bestätigungen der Relativitätstheorie.

16. Stabilität von Kreisbahnen**(7 Punkte)**

Ein Massenpunkt M bewegt sich in einem Zentralkraftfeld $\underline{F}(\underline{r}) = F(|\underline{r}|) \underline{e}_r$.

- (a) Welche Bedingung muss die Funktion $F(|\underline{r}|)$ in Abhängigkeit vom Drehimpuls erfüllen, damit Kreisbahnen mit dem Radius R möglich sind?
- (b) Betrachten Sie nun kleine Auslenkungen $R + \delta r$ und finden Sie eine weitere Bedingung an die Funktion $F(|\underline{r}|)$, für die diese Kreisbahnen auch stabil sind.
- (c) Wenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (b) auf den Spezialfall eines Kraftfeldes der Form

$$F(|\underline{r}|) = -\frac{K}{|\underline{r}|^n} \quad \text{mit} \quad K, n = \text{const} \quad (1)$$

an und stellen Sie eine Bedingung an die Konstante n auf.

17. Virialsatz**(5 Punkte)**

Verifizieren Sie für das Zweikörperproblem der Himmelsmechanik den Virialsatz

$$U = \frac{\langle V \rangle}{2} \quad \text{mit} \quad \langle V \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau V dt \quad .$$

Greifen Sie dazu auf aus der Vorlesung bekannte Ergebnisse zurück.

Hinweise: Beachten Sie zunächst $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau V(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi$. Außerdem ist $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\epsilon \cos x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ für $0 < \epsilon \leq 1$.