INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK SS 2011

5. Übungsblatt Abgabe: Mo., 2. Mai bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

10. **Präzises Zielen** **(9 Punkte)**

Lässt man einen Gegenstand von einem Turm fallen, so fällt dieser aufgrund der Erdrotation nicht ganz senkrecht nach unten, sondern wird nach Osten hin abgelenkt (Reibungskräfte seien vernachlässigt). Das System Σ' wird daher so gewählt, dass x' nach Süden, y' nach Osten und z' senkrecht zur Oberfläche nach von der Erde weg zeigt.

(a) Die Größe dieser Abweichung soll in erster Ordnung bzgl. der Erdrotationskreisfrequenz ω abgeschätzt werden, d.h. alle Terme, die ω^2 oder höhere Potenzen von ω enthalten, sollen vernachlässigt werden. Zudem soll ω als zeitlich konstant angenommen werden. Zeigen Sie, dass sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} d_t'^2 x' &= 2\omega \sin\theta\, \dot{y}' \\ d_t'^2 y' &= -2\omega \left(\cos\theta\, \dot{z}' + \sin\theta\, \dot{x}'\right) \\ d_t'^2 z' &= -g + 2\omega\cos\theta\, \dot{y}' \end{aligned}$$

ergibt, wobei θ den Breitengrad bezeichnet.

(b) Lösen Sie das System, indem Sie die Gleichungen integrieren und dann ineinander einsetzen. Die Anfangsbedingungen sollen entsprechend einem Massenpunkt mit Anfangshöhe h und Anfangsgeschwindigkeit Null gewählt werden. Zur Vereinfachung der Ergebnisse nehmen Sie $\omega t \ll 1$ an und entwickeln Sie Sinus und Cosinus. Für y' erhalten Sie so die erwähnte Ostabweichung.

(c) Wie groß ist in Braunschweig die Ostabweichung bei einem Fall aus 50 m Höhe?

11. **Konservative Kraftfelder** **(6 Punkte)**

(a) Für welche $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Felder

i. $\underline{F}_1(\underline{x}) = (\underline{u}\cdot\underline{x})\underline{v}$

ii. $\underline{F}_2(\underline{x}) = (ax + y, by, cz)$

iii. $\underline{F}_3(\underline{x}) = \frac{1}{r^3}(ax, by, cz)$

konservativ? Bestimmen Sie für $\underline{F}_2(\underline{x})$ und $\underline{F}_3(\underline{x})$ gegebenenfalls das Potential!

(b) Als weiteres Beispiel betrachten wir das Kraftfeld

$$\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -y/\varrho^2 \\ x/\varrho^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2 \neq 0 \quad .$$

Zeigen Sie, dass die Rotation von $\underline{F}(\underline{x})$ verschwindet.

Bitte wenden ⟶

(c) Nun sollte dies also ein konservatives Kraftfeld sein, ist es aber nicht global, sondern nur in einem lokalen (einfach zusammenhängenden) Gebiet, dass die z-Achse ($\varrho = 0$) nicht enthält.

Prüfen Sie dies beispielhaft, indem Sie das Wegintegral von $\underline{F}(\underline{x})$ über einen Kreis um den Ursprung mit Radius r berechnen.

(d) Das Problem liegt offenbar in der Singularität bei $\varrho = 0$ begründet. Alle geschlossenen Wegintegrale, die diese Singularität umschließen, ergeben als Wert 2π, diejenigen, die dies nicht tun, ergeben tatsächlich wieder Null. Überprüfen Sie dies für verschobene Kreise der Form

$$\underline{s}(\phi) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos(\phi) \\ R\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad .$$