


**8. Abhängigkeit der Erdbeschleunigung von der Geographischen Breite (5 Pt.)**

Wir betrachten ein Inertialsystem  $\Sigma$ , dessen Ursprung mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt, und ein rotierendes System  $\Sigma'$ , dessen Ursprung auf der Erdoberfläche liegt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann für die Kraft im bewegten System gilt

$$m d_t'^2 \underline{x}' = \underline{F} - m \underline{a}_{tr} - m d_t' \underline{\omega} \times \underline{x}' - m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2 m \underline{\omega} \times d_t' \underline{x}' \quad (1)$$

Hiervon ausgehend wollen wir nun die Schwerebeschleunigung  $\underline{g}$  in Abhängigkeit vom Breitengrad  $\theta$  bestimmen. Es soll dabei sowohl die Abplattung der Erde infolge der Erdrotation als auch die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden.

- (a) Wir nehmen an, dass im Inertialsystem nur die Schwerkraft wirkt. Zeigen Sie, dass man dann (1) umschreiben kann zu

$$m d_t'^2 \underline{x}' = m \underline{g} - m d_t' \underline{\omega} \times \underline{x}' - m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2 m \underline{\omega} \times d_t' \underline{x}' \quad (2)$$

mit

$$\underline{g} = -\gamma \frac{M_{Erde}}{R^2} \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}) \quad .$$

$\underline{R}$  bezeichnet hierbei den Vektor zur Erdoberfläche. Machen Sie sich dazu anhand der Herleitung von Gleichung (1) klar, wie man  $\underline{a}_{tr}$  umschreiben könnte.

- (b) Bestimmen Sie die Schwerebeschleunigung  $\underline{g}$  in Abhängigkeit von der geographischen Breite  $\theta$ . Dazu soll die Erde als Ellipsoid mit den Halbachsen  $a = r_{\text{Pol}}$  und  $b = c = r_{\text{Äquator}}$  betrachtet werden.
- (c) Berechnen Sie  $|\underline{g}|$  für den Pol, den Äquator und Braunschweig bei  $\theta = 52.2667^\circ$ . Es ist  $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$ ,  $M_{Erde} = 5.974 \cdot 10^{24} \text{kg}$ ,  $r_{\text{Pol}} = 6357 \text{km}$  und  $r_{\text{Äquator}} = 6378 \text{km}$ .
- (d) Wie schnell müsste sich die Erde drehen, damit man am Äquator schwerelos wäre?

**9. Erzwungene Schwingung (5 Punkte)**

Ein Kraftzentrum bewegt sich gegenüber einem Inertialsystem  $\Sigma$  gemäß

$$x_0(t) = \hat{x} \sin \Omega t$$

und zieht einen Massenpunkt mit einer Kraft an, die proportional zum Abstand vom Kraftzentrum ist.

Bitte wenden  $\longrightarrow$

- (a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen in einem System  $\Sigma'$ , dessen Ursprung sich mit dem Kraftzentrum mitbewegt und nicht rotiert.
- (b) Die erhaltene Bewegungsgleichung ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und einer zeitabhängigen Inhomogenität. Lösen sie zunächst die homogene Differentialgleichung (also ohne den explizit zeitabhängigen Term) und versuchen Sie dann einen Ansatz für die inhomogene Lösung zu raten. Die Anfangsbedingungen seien  $x'(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}'(t=0) = 0$ .