



## 1. Differentialoperatoren

- Der *Gradient* eines skalaren Feldes  $\Phi(\underline{x})$  ist

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \partial_{\underline{x}} \Phi \stackrel{\text{in 3D}}{=} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Phi \quad . \quad (1)$$

Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von  $\Phi$ .

- Die *Divergenz* eines Vektorfeldes  $\underline{A}(\underline{x})$  ist

$$\text{div } \underline{A} = \nabla \cdot \underline{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \stackrel{\text{in 3D}}{=} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad . \quad (2)$$

Anschaulich stellt die Divergenz die Quellstärke von  $\underline{A}$  dar.

- Die *Rotation* eines Vektorfeldes  $\underline{A}(\underline{x})$  ist

$$\text{rot } \underline{A} = \text{curl } \underline{A} = \nabla \times \underline{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \quad . \quad (3)$$

Anschaulich stellt die Rotation die Wirbelstärke von  $\underline{A}$  dar.

- (a) Es sei

$$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x \\ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x, y, z) = -4xy^2 - 3xz + 8yz^3 \quad \text{und} \quad \underline{B} = \nabla \Phi \quad .$$

Berechnen Sie  $\text{div } \underline{A}$ ,  $\text{rot } \underline{A}$ ,  $\text{rot } \underline{B} = \text{rot grad } \Phi$  und  $\text{div rot } \underline{A}$ .

- (b) Es ist  $|\underline{x}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Berechnen Sie

$$\begin{array}{lll} (i) \text{ grad } r & (ii) \text{ div } \underline{x} & (iii) \text{ grad } |\underline{x} - \underline{x}'| \\ (iv) \text{ grad}' |\underline{x} - \underline{x}'| & (v) \text{ grad } \frac{1}{r} & (vi) \text{ grad } \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \\ (vii) \text{ grad}' \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} & (viii) \text{ grad } \ln r & \end{array}$$

- (c) Zeigen Sie, dass allgemein gilt

$$\text{div rot } \underline{F} = 0$$

$$\text{rot grad } f = 0$$

für beliebige  $\underline{F}$  und  $f$ .

**Klausurtermin (vorläufig):** Dienstag, 26. Juli 2011; 9.30 Uhr - 12.30 Uhr in MS 3.1

**Teilnahmevoraussetzungen:** 50 % der Hausaufgabenpunkte. Zusätzlich muss in den Übungen zweimal eine Aufgabe erfolgreich vorgerechnet werden. Es besteht jedoch keine Anwesenheitspflicht in den Übungen. Außerdem wird zweimal während des Semesters ein ca. 20 minütiger Test geschrieben, der wie ein normaler Hausaufgabenzettel gewichtet wird. Die Termine werden rechtzeitig bekannt gegeben.

**Fragen an:**

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317
Veit Dahlke	v.dahlke@tu-bs.de	Raum A 225
Christoph Stahl	c.stahl@tu-bs.de	
Richard Winkelmann	f-r.winkelmann@tu-bs.de	

**Link:**

<http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose11/mech11>