

Mechanik in Alltagskontexten

Rainer Müller

Physik wird interessanter, wenn sie auf Kontexte aus dem Alltag bezogen wird. In diesem Beitrag werden Inhalte aus der Kinematik vorgestellt: Bungee-Springen und Weitsprung als Beispiele für Zeit-Weg-Diagramme bzw. den schrägen Wurf.

1 Einleitung

Seit langer Zeit wird immer wieder gefordert, dass das Lernen von Physik anhand von konkreten Beispielen aus dem Alltag erfolgen sollte. Die Forderung nach „sinnstiftenden Kontexten“ [1] ist schon fast Allgemeingut geworden und teilweise in die Gestaltung von Lehrplänen eingeflossen. Konkrete Unterrichtsvorschläge, die über das punktuelle Einbetten von Alltagsgegenständen (etwa als Anwendungsbeispiele aus der Technik) hinausgehen, liegen jedoch kaum vor.

Hintergrund der Forderung nach Kontextorientierung des Physikunterrichts ist die Besorgnis um das geringe Interesse am Fach Physik, insbesondere bei Mädchen. Die Einbettung der Physik in Alltagskontexte soll dazu beitragen, das Schülerinteresse zu steigern.

Aber auch Argumente aus der Lernpsychologie sprechen für die Kontextorientierung des Physikunterrichts. In den modernen konstruktivistisch geprägten Lerntheorien spielt das so genannte situierte Lernen, das Lernen in konkreten Problemsituationen, eine große Rolle. Reinmann-Rothmeier und Mandl [2] schreiben hierzu: „Ausgangspunkt von Lernprozessen sollten authentische Probleme sein, die aufgrund ihres Realitätsgehalts und ihrer Relevanz dazu motivieren, neues Wissen oder neue Fertigkeiten zu erwerben. Die Lernumgebung ist so zu gestalten, dass sie den Umgang mit realistischen Problemen und authentischen Situationen ermöglicht und anregt. Der Vorteil: Situietheit und Authentizität sichern einen hohen Anwendungsbezug beim Lernen.“

An anderer Stelle [3] ist schon in allgemeiner Form dargelegt worden, in welcher Weise kontextorientierter Unterricht strukturell beschaffen sein sollte. Hier soll nun für einen Teilbereich der Newtonschen Mechanik ein konkretes Beispiel für das Physiklernen in Alltagskontexten gegeben werden. Es handelt sich dabei um einen Ausschnitt aus einer Vorlesung „Mechanik“ für Lehramtsstudierende. Physikalisch steht die Kinematik im Mittelpunkt (Bewegungsdiagramme, Geschwindigkeit und Beschleunigung, Wurf); als Kontexte aus dem Bereich des Sports dienen Bungee-Sprung und Weitsprung.

2 Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Bungee-Sprung

2.1 Der Ursprung des Bungee-Springens

Der Legende nach hat das Bungee-Springen folgenden Ursprung: Auf der Südsee-Insel Pentecost floh eine unglückliche junge Frau vor ihrem gewalttätigen Mann auf eine hohe Kokospalme. Ihr Mann verfolgte sie und kletterte ihr nach. Als er sie fast erreicht hatte, stürzte sie sich in die Tiefe. Durch eine Liane, die sie sich vorher um den Fußknöchel gewickelt hatte, wurde sie vor dem Aufprall bewahrt. Ihr Mann wurde durch ihre List getäuscht und sprang in den Tod.

Auf der Insel springen seither jährlich junge Männer als Mutprobe von einem hohen Holzturm, gesichert von Lianen. Das heutige Bungee-Springen entwickelte sich aus diesem Brauch als Abenteuer-Sportart. Statt von einem Holzturm springen Mutige von Kränen oder Brücken. An die Stelle der Liane ist ein sehr dehnbares Seil aus Latex-Fasern getreten, das den Fall weniger ruckartig beendet.

2.2 Physikalische Analyse eines Bungee-Sprungs

Ein Bungee-Sprung soll uns im Folgenden als Beispiel dienen, um die physikalische Analyse komplexer Bewegungsvorgänge zu demonstrieren. Die Bilderfolge in Abb. 1 zeigt den Verlauf eines Sprungs aus 56 m Höhe. Die Bilder sind im Abstand von etwa 1,2 s aufgenommen. Zunächst fällt der Springer ungebremst. Wenn er so weit gefallen ist, dass das Seil gestrafft ist, wird er gebremst, bis er unmittelbar über der Wasseroberfläche für einen kurzen Moment zur Ruhe kommt. Anschließend wird er vom gespannten Seil wieder nach oben geschleudert (hier nicht sichtbar).

Für eine präzise physikalische Beschreibung des Sprungs ist es hilfreich, die Höhe y des Springers nicht nur für die ausgewählten Momente in Abb. 1 zu kennen, sondern für jeden beliebigen Zeitpunkt. Diese Information ist im Zeit-Weg-Diagramm in Abb. 2 enthalten.

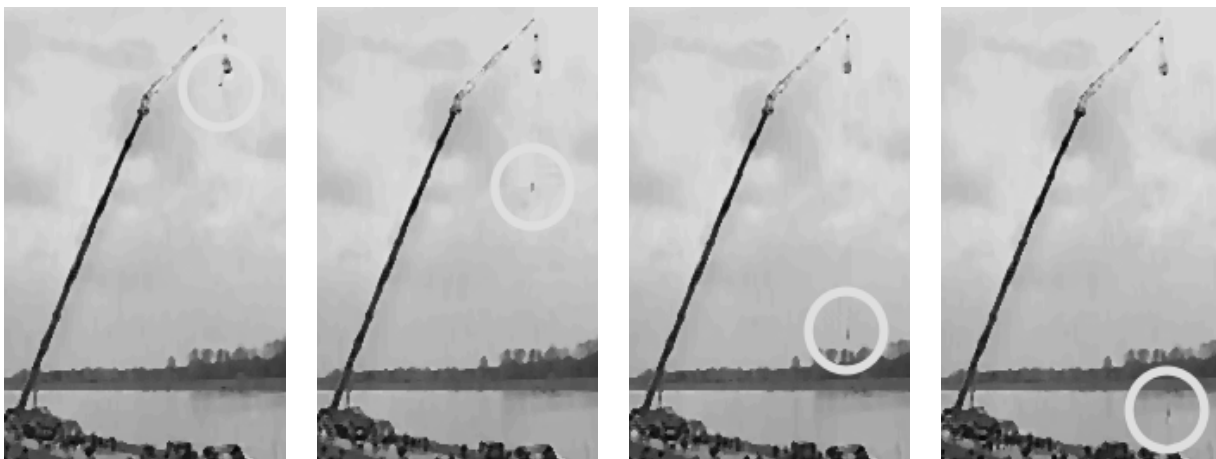


Abb. 1: Verlauf eines Bungee-Sprungs

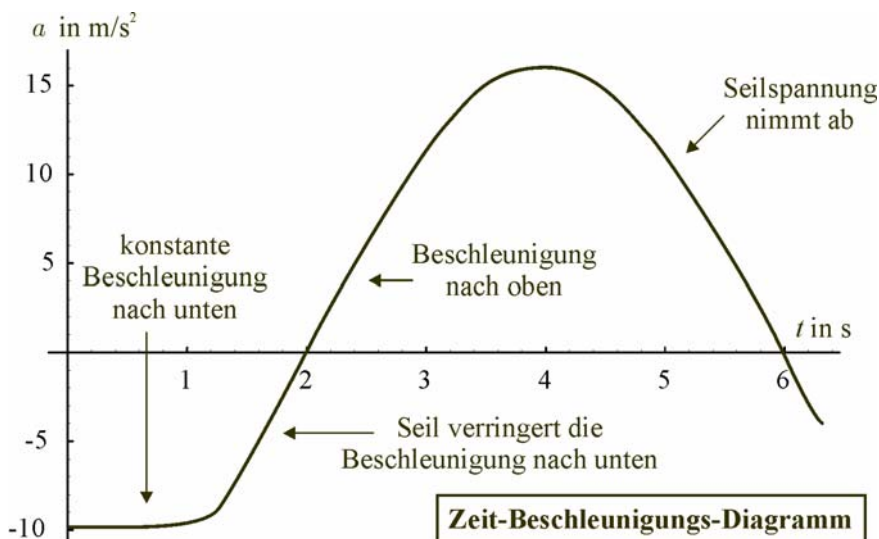
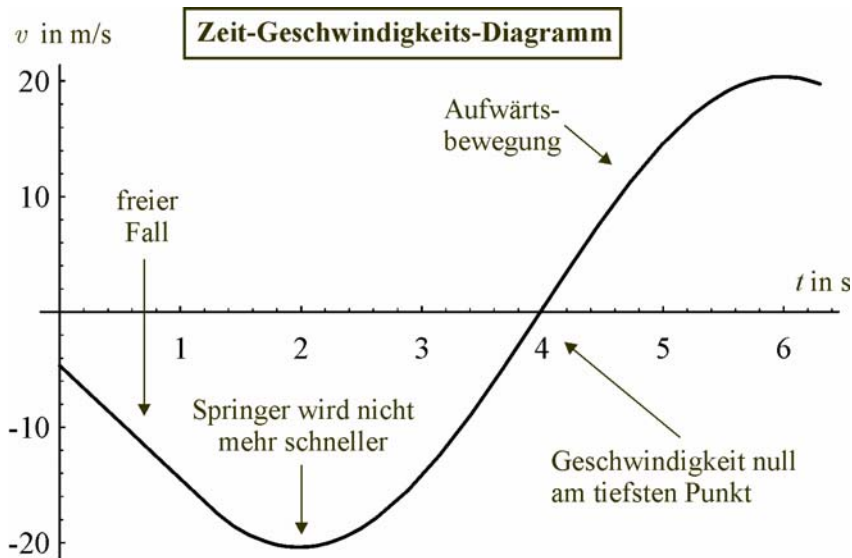
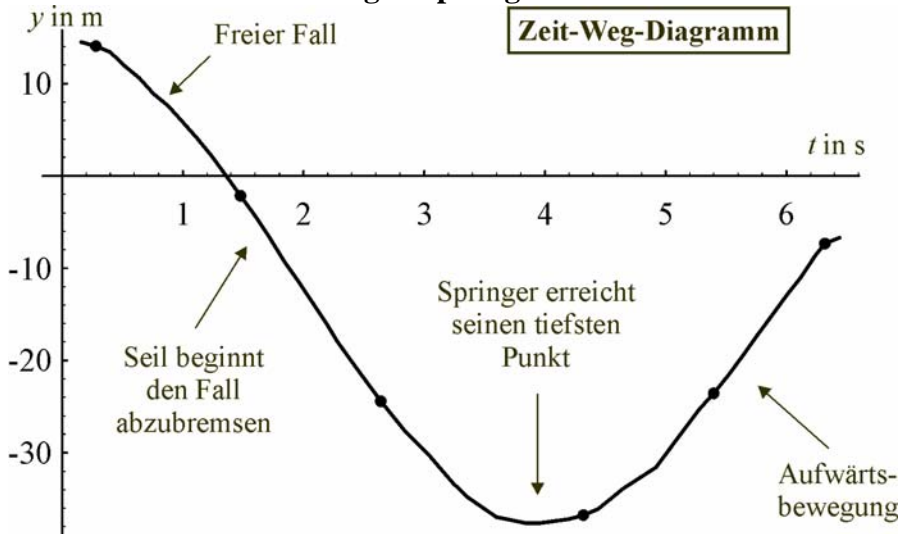


Abb. 2: Verlauf des Bungee-Sprungs: (a) Höhe, (b) Geschwindigkeit, (c) Beschleunigung

Um es zu erstellen, wurde der Sprung auf Video aufgenommen und mit einem Messwerterfassungssystem die Position des Springers in jedem Teilbild (also im Abstand von 1/25 Sekunde) registriert.

In den ersten 1,2 Sekunden (im Bereich positiver y -Werte) erkennt man den für den freien Fall charakteristischen parabelförmigen Verlauf der $y(t)$ -Kurve. Wir werden später noch darauf zurückkommen. Nach 1,2 Sekunden ist der Springer 12 m frei gefallen und das Seil ist gestrafft. Das Seil beginnt nun, den Fall abzubremsen. Der tiefste Punkt ist nach 4 Sekunden Fallzeit erreicht. Nach 53 durchstürzten Metern ist der Springer zur Ruhe gekommen und bleibt eine ganze Weile in der Nähe der tiefsten Position. Vom gespannten Seil wird er anschließend noch einmal gut 30 Meter nach oben gezogen.

2.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Für das Verständnis der Bewegung sehr hilfreich ist das *Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm* in Abb. 2 (b). Die vertikale Geschwindigkeit v kann man nicht direkt aus den Fotos ablesen, sondern muss sie aus Orts- und Zeitdifferenzen berechnen:

$$v = \frac{Dy}{Dt}. \quad (1)$$

Eine negative Geschwindigkeit, wie sie das Diagramm in den ersten 4 Sekunden zeigt, bedeutet, dass die Geschwindigkeit nach unten gerichtet ist. Die Geschwindigkeit wird null, wenn der Springer bei $t \approx 4$ s seinen tiefsten Punkt erreicht hat. Danach setzt die Aufwärtsbewegung ein und v nimmt positive Werte an.

Wenn der Springer sich, bevor das Seil gespannt ist, im freien Fall befindet (d. h. für $t < 1,2$ s), zeigt das t - v -Diagramm eine Gerade. Dies ist wieder typisch für den freien Fall: Der Betrag der Geschwindigkeit nimmt linear zu.

Nach 2 Sekunden hat die Bremswirkung des Seils soweit eingesetzt, dass die Fallbewegung nicht mehr schneller wird. Die Geschwindigkeitskurve hat an diesem Punkt ein Extremum. Man kann ablesen, dass der Springer eine Maximalgeschwindigkeit von etwa 20 m/s erreicht. Wenn er also zu diesem Zeitpunkt, in 25 m Höhe, nach unten schaut, sieht er den Boden mit 72 km/h auf sich zu rasen. Zu seinem Glück verringert sich die Geschwindigkeit anschließend wieder bis zu $v = 0$ am Umkehrpunkt.

Welche Beschleunigungen muss der menschliche Körper beim Bungee-Sprung aushalten? Diese Frage können wir mit dem *Zeit-Beschleunigungs-Diagramm* in Abb. 2 (c) beantworten. Die *Beschleunigung* a beschreibt die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit:

$$a = \frac{Dv}{Dt}. \quad (2)$$

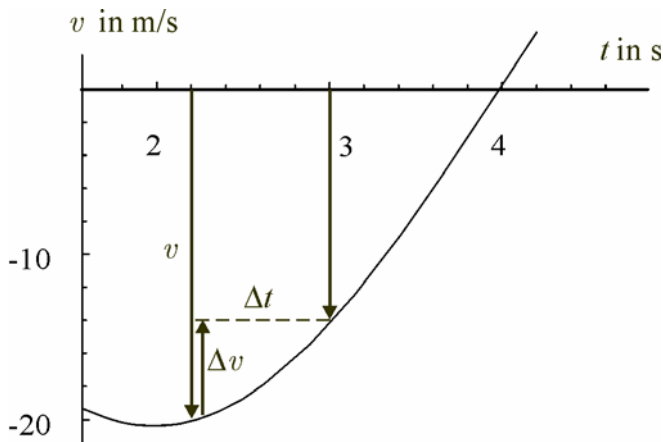


Abb. 3: Geschwindigkeit v und Geschwindigkeitsänderung Δv

Zu Beginn, in der Phase des freien Falls, wirkt natürlich die konstante Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ nach unten. Danach bremst das Seil ab, und $|a|$ wird geringer.

Nach 2 Sekunden ist das Seil so weit gedehnt, dass der nach oben beschleunigt wird ($a > 0$). Beschleunigung nach oben bedeutet aber noch nicht, dass nun auch die Geschwindigkeit nach oben gerichtet ist. Nur die die Geschwindigkeitsänderung Δv in der Zeit Δt ist nach oben gerichtet. Für den Bungee-Springer äußert sich das darin, dass er nun langsamer wird. Das ist im t - v -Diagramm zu erkennen und wird in Abb. 3 noch einmal verdeutlicht.

Der größte Wert der Beschleunigung ist bei $t = 4 \text{ s}$ erreicht, zu dem Zeitpunkt also, zu dem der Springer am tiefsten Punkt momentan zur Ruhe kommt (auch hier muss man aufpassen: Die Geschwindigkeit ist in diesem Moment null, die Geschwindigkeitsänderung aber maximal). Das Seil ist jetzt am straffsten gespannt und zieht den Springer nach oben. Die maximale Beschleunigung, die der Springer ertragen muss, liegt bei 16 m/s^2 , also etwa $1,9 g$. Diese moderate Beschleunigung stellt zwar medizinisch noch kein Problem dar, aber ein wenig unangenehm wird die Lage für den Springer trotzdem: Er hängt mit dem Kopf nach unten am Seil, und nach dem Trägheitsgesetz fließt sein Blut bei der Aufwärtsbewegung in Richtung Kopf.

2.4 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Der Bungee-Sprung ist ein recht komplexer Bewegungsvorgang. Die Diagramme in Abb. 2 für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich mathematisch nicht ohne weiteres durch einfache Funktionen erfassen. Wir haben sie deshalb grafisch analysiert.

Es gibt jedoch einige Bewegungsformen, deren mathematische Beschreibung sehr einfach ist, so dass wir sie durch Formeln erfassen können. Ein Beispiel ist

die *gleichmäßig beschleunigte Bewegung*, bei der die Beschleunigung a sich nicht ändert sondern während der gesamten Bewegung konstant ist. Die Formeln für Ort y und Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t lauten:

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \\v(t) &= v_0 + a t.\end{aligned}\tag{3}$$

Dabei ist y_0 die Position zur Zeit $t = 0$ und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit.

Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist uns beim Bungee-Sprung schon begegnet: Abb. 2 (c) zeigt, dass die Beschleunigung in der Phase des freien Falls ($t < 1,2$ s), in der das Seil den Springer noch nicht bremst, den konstanten Wert $a = -g$ besitzt. Der freie Fall ist also ein spezieller Fall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Nach Gl. (3) hängen Ort und Geschwindigkeit quadratisch bzw. linear von der Zeit ab. Im Zeit-Weg-Diagramm erwarten wir daher einen parabelförmigen Verlauf, im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm eine Gerade. Auch dies ist in Abb. 2 gut zu erkennen.

3 Weitsprung und schräger Wurf

Kommen wir zu einer weiteren Sportart, deren physikalische Analyse lohnend ist: zum Weitsprung in der Leichtathletik. Das Ziel der Disziplin ist leicht formuliert: anlaufen, kurz vor dem Absprungbalken abspringen und in möglichst großer Entfernung dahinter in der Sandgrube wieder zu landen. Das hört sich einfach an, aber zu einem guten Weitsprung gehört viel Technik, Koordination und Schnelligkeit.

Aus Erfahrung wissen Weitspringer, dass ein möglichst schneller Anlauf wichtig ist. Nur sehr gute Sprinter haben Chancen auf große Weiten. Weltklassespringer erreichen kurz vor dem Absprung Geschwindigkeiten von etwa 10 m/s – damit hätten sie auch beim 100 m-Lauf gute Chancen.

Die Kunst beim Weitsprung besteht darin, die große Anlaufgeschwindigkeit beim Absprung möglichst beizubehalten und noch dazu eine große Sprunghöhe zu erzielen. Flache Sprünge sind keine weiten Sprünge. Es ist aber nicht einfach, einen großen Absprungwinkel zu erreichen, denn mit einem einzigen Schritt muss der Körper sehr stark nach oben beschleunigt werden. Die Sportler haben dafür eine besondere Anlauftechnik entwickelt (die letzten drei Schritte im Rhythmus kurz-lang-kurz), wobei sie für einen möglichst hohen Sprung sogar eine Verringerung der Horizontalgeschwindigkeit in Kauf nehmen.

Nachdem der Weitspringer einmal abgesprungen ist, steht die Flugbahn des Körperschwerpunkts unwiderruflich fest (Abb. 4). Der Sportler kann nichts tun, um sie zu verändern (nach dem 2. Newtonschen Gesetz müssten dazu externe Kräfte auf seinen Körper wirken – in der Flugphase wirkt aber nur die Schwerkraft).

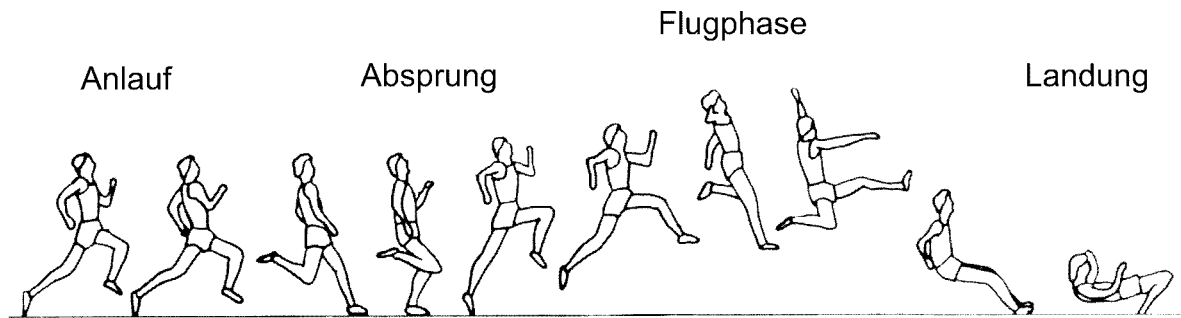


Abb. 4: Phasen des Weitsprungs

An welcher Stelle der Körperschwerpunkt in der Sandgrube aufkommt, ist durch die Flugbahn eindeutig bestimmt. Trotzdem ist die Landung ein wichtiger Bestandteil des Sprungs. Denn für die Wertung zählt nicht der Körperschwerpunkt, sondern derjenige Körperteil, der im Sand den entscheidenden Abdruck hinterlässt. Der Weitspringer muss also im Flug seine Gliedmaßen so ordnen, dass sie möglichst weit vorn aufkommen.

Die Bewegungen, die ein Weitspringer während des Sprungs ausführt (und die Namen wie Hangsprung- oder Laufsprungtechnik bekommen haben) beeinflussen also gar nicht den Sprung selbst, sondern dienen zur Vorbereitung der Landung. Sie sorgen dafür, dass der Springer so landet, dass die bei der Landung „verschenkte“ Weite möglichst gering bleibt.

3.1 Schräger Wurf

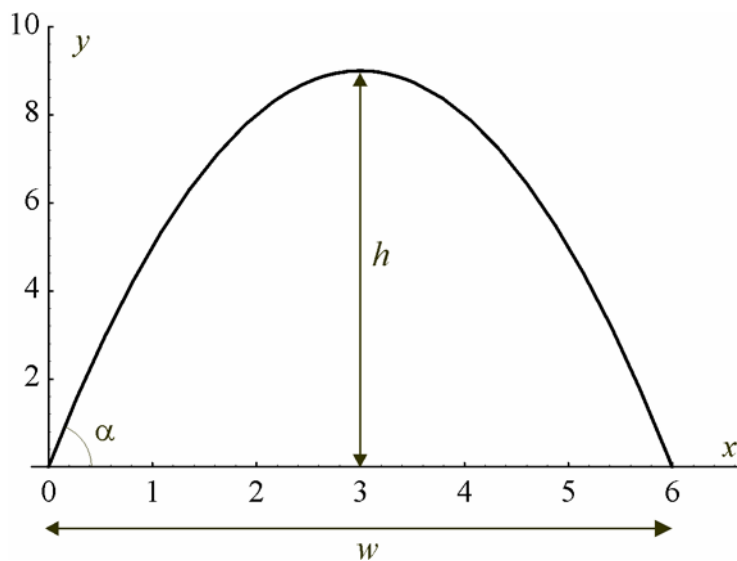


Abbildung 5: Schräger Wurf

Um den Weitsprung physikalisch beschreiben zu können, müssen wir zunächst etwas allgemeiner auf eine Bewegungsform eingehen, die dabei die entscheidende Rolle spielt: der sogenannte „schräge Wurf“.

Schon der Name sagt aus, worum es beim schrägen Wurf geht: Ein Körper wird unter einem Winkel α zur Horizontalen abgeworfen und bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft, bis er wieder landet (Abbildung 5). Im Gegensatz zu den vorher betrachteten Beispielen handelt es sich hierbei um eine *zweidimensionale* Bewegung. Das bedeutet, dass man nun zwei Koordinaten, die momentane Weite $x(t)$ und die momentane Höhe $y(t)$, angeben muss, um die Position des geworfenen Körpers anzugeben. In Abbildung 5 ist auch kein Zeit-Weg-Diagramm dargestellt, wie man auf den ersten Blick leicht vermutet, sondern die *Bahnkurve* des Körpers in der x - y -Ebene, die er während der Bewegung durchläuft. Im Fall des schrägen Wurfs hat die Bahnkurve die Gestalt einer Parabel, der bekannten *Wurfparabel*: Der geworfene Körper steigt an, erreicht in der Höhe h seinen höchsten Punkt und trifft nach der Wurfweite w wieder auf dem Erdboden auf.

Die mathematische Beschreibung des schrägen Wurfs ist einfacher als man meinen könnte. Die Bewegung in x -Richtung verläuft nämlich völlig unabhängig von der in y -Richtung und umgekehrt, so dass wir beide einzeln betrachten können.

In x -Richtung folgt der Körper einfach dem Trägheitsgesetz: Es wirken keine Kräfte in dieser Richtung, also ändert sich seine Geschwindigkeit nicht. Er behält seine Anfangsgeschwindigkeit v_{x0} bei, ungestört vom Auf- und Absteigen in y -Richtung.

In y -Richtung bewegt sich der Körper unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die resultierende Aufwärts- und wieder Abwärtsbewegung ist aber auch nichts Neues: Es ist nichts anderes als der freie Fall, die gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $-g$.

Die zweidimensionale Bewegung beim schrägen Wurf setzt sich demnach aus zwei einfachen eindimensionalen Bewegungsformen zusammen: gleichförmige Bewegung in x -Richtung und gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y -Richtung. Das Zeit-Weg-Gesetz lautet entsprechend.

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{x0} t, \\y(t) &= y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}\tag{4}$$

3.2 Geschwindigkeit als Vektorgröße

In Gleichung (4) muss die Anfangsgeschwindigkeit des geworfenen Körpers eingesetzt werden. Hier tritt nun bei allen zwei- oder dreidimensionalen Bewegungen etwas Neues auf: Die Geschwindigkeit ist eine *Vektorgröße*. Das bedeutet, dass sie durch die bloße Angabe eines Zahlenwerts (wie z. B. „Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt 26 km/h“) nicht vollständig beschrieben ist.

Auch die räumliche Richtung muss angegeben werden. Vektorgrößen sind durch ihren *Betrag* (die 26 km/h) und ihre *Richtung im Raum* charakterisiert.

Im Fall des schrägen Wurfes ist die räumliche Richtung der Anfangsgeschwindigkeit durch die Himmelsrichtung und den Abwurfwinkel α gegeben. Dass der Abwurfwinkel für das Wurfresultat entscheidend ist, leuchtet unmittelbar ein. Hingegen ist die Himmelsrichtung für die physikalische Beschreibung völlig unerheblich. Die Wurfweite oder -höhe sind davon unabhängig. Deshalb legt man willkürlich die x -Achse in Wurfriechtung, und damit liegt – wie oben erwähnt – nur noch eine zweidimensionale Bewegung vor.

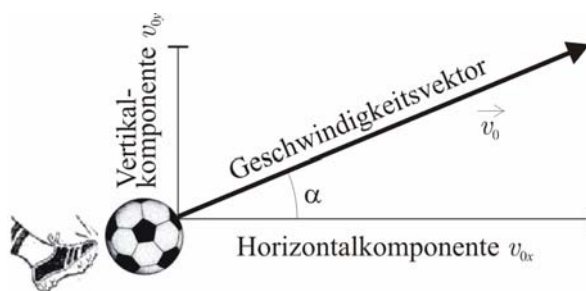


Abb. 6: Geschwindigkeitsvektor und Geschwindigkeitskomponenten

In Abbildung 6 ist der Vektor \vec{v}_0 der Anfangsgeschwindigkeit als dicker Pfeil eingezeichnet. Betrag und Richtung des Vektors sind durch die Länge und Richtung des Pfeils dargestellt. Zusätzlich sind in der Abbildung auch noch die *Horizontal-* und die *Vertikalkomponente* der Anfangsgeschwindigkeit gezeigt. Die Horizontalkomponente v_{0x} gibt an, wie schnell der Körper in horizontaler Richtung vorankommt; entsprechend beschreibt die Vertikalkomponente v_{0y} den senkrechten Anteil der Anfangsgeschwindigkeit. Diese beiden Komponenten sind die Angaben, die im Zeit-Weg-Gesetz (4) benötigt werden. Offensichtlich hängen sie mit Betrag und Richtung zusammen, denn bei einem Abwurfwinkel von 90° wird der Körper senkrecht nach oben geworfen und die Horizontalkomponente ist Null. Umgekehrt ist bei einem Abwurfwinkel von 0° die Vertikalkomponente Null.

Der Zusammenhang zwischen Betrag $|\vec{v}_0|$, Abwurfwinkel α und den beiden Komponenten v_{0x} und v_{0y} ist:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= |\vec{v}_0| \cos \alpha, \\ v_{0y} &= |\vec{v}_0| \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Was uns am schrägen Wurf interessiert, ist seine Weite w und Höhe h (beide sind in Abbildung 5 eingezeichnet). Mit geringem mathematischem Aufwand kann man beide Größen aus Gleichung (4) ermitteln. Man findet:

$$\text{Wurfweite: } w = \frac{|\vec{v}_0|^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad (6)$$

$$\text{Wurfhöhe: } h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{|\mathbf{v}_0|^2 \sin^2 a}{2g}. \quad (7)$$

3.3 Weitsprung als schräger Wurf

Kehren wir nun zu unserem eigentlichen Ziel zurück: der physikalischen Analyse des Weitsprungs. Wir fragen: Was zeichnet einen guten Sprung aus? Wie sieht der „ideale“ Sprung aus, auf den man im Training hinarbeiten sollte? Wie weit kann ein Mensch überhaupt springen? Jahrzehntlang konnte der „Jahrhundertsprung“ von Bob Beamon (8,90 m, 1968) nicht überboten werden. Im Jahr 1991 gelang Mike Powell ein noch weiterer Sprung, und seitdem liegt der Weltrekord liegt bei 8,95 m. Um wie viel kann diese Weite noch gesteigert werden? Mit physikalischen Mitteln können wir dieser Frage (jedenfalls in Teilaspekten) nachgehen.

Ähnlich wie beim schrägen Wurf folgt der Körperschwerpunkt des Springers einer Wurfparabel. Für die Form der Bahn ist unmaßgeblich, dass der Springer im Gegensatz zu einem geworfenen Ball aktiv abspringt. Was zählt, sind die Kräfte, die während der Flugphase auf ihn wirken, und beim Ball wie beim Springer wirkt ausschließlich die Schwerkraft (wenn man vom Luftwiderstand absieht). Die Bewegungen des Springers während der Flugphase beeinflussen die Bahn des Körperschwerpunkts nicht.

Um die ersten qualitativen Erkenntnisse zu gewinnen, betrachten wir Gleichung (6) für die Weite beim schrägen Wurf. Sie hängt von den beiden Parametern Abwurfgeschwindigkeit $|\mathbf{v}_0|$ und Abwurfwinkel α ab. Wir sehen schon hier, dass für den Weitsprung ein schneller Anlauf besonders wichtig ist, denn die Weite hängt quadratisch von der Abwurfgeschwindigkeit ab. Die Weite vervierfacht sich, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird.

Nach Gleichung (6) läge der optimale Absprungwinkel bei 45° , denn für diesen Wert hat die Weite als Funktion von α ihr Maximum. Tatsache ist allerdings, dass kein Springer einen so steilen Absprungwinkel erreicht. Selbst die besten Weitspringer, die ihre Sprungtechnik über Jahre hinweg optimiert haben, erreichen nur Absprungwinkel zwischen 20° und 30° .

Grund dafür ist, dass bei einem Absprungwinkel von 45° die Vertikal- und die Horizontalkomponente der Absprunggeschwindigkeit gleich sein müssten (vgl. Abbildung 6 und Gl. (5)). Die Horizontalkomponente kann aber durch einen langen Anlauf aufgebaut werden (genau genommen ist das der einzige Zweck des Anlaufs), während die Vertikalkomponente durch einen einzigen Schritt beim Absprung erzielt werden muss. Obwohl die Weitspringer – wie oben erwähnt – für einen steileren Absprungwinkel sogar etwas von ihrer Horizontalgeschwindigkeit opfern, wird der optimale Absprungwinkel bei

weitem nicht erreicht. Wir werden das bei unseren Überlegungen zur maximalen Sprungweite berücksichtigen müssen.

3.4 Physikalisches Modell des Weitsprungs

Versuchen wir nun, ein mathematisch handhabbares und doch möglichst realitätsnahes Modell eines Weitsprungs zu entwerfen. Die erste Modellannahme haben wir bereits vorgenommen: Statt des ganzen Springers betrachten wir nur seinen Körperschwerpunkt (der beim Menschen etwas über Hüfthöhe liegt). Beim Absprung und während des Flugs bereitet diese Annahme keine Probleme. Die Landung jedoch ist ein komplizierter Vorgang, dessen Details wir nicht modellieren können. In unserer mathematischen Beschreibung können wir nur den Landepunkt des Körperschwerpunkts berechnen. Unsere Abschätzung der Sprungweite sollte unter dieser Vereinfachung aber nicht allzu sehr leiden, denn bei einem guten Sprung muss der Springer darauf hinwirken, dass das letzte Körperteil so wenig wie möglich hinter dem Schwerpunkt landet. Alles andere ist „verschenkte Weite“.

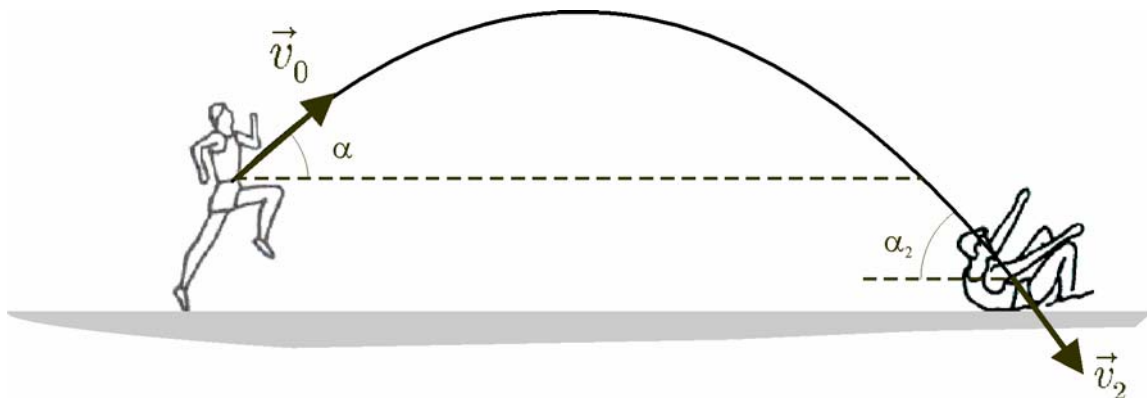


Abb. 7: Bahnkurve beim Weitsprung

Um die Flugphase zu modellieren, ist es auf den ersten Blick naheliegend, den Weitsprung einfach als schrägen Wurf des Körperschwerpunkts zu betrachten. Das wird aber nicht ausreichen, denn wie man in Abbildung 7 erkennen kann, ist die Bahnkurve des Springers nicht symmetrisch. Er springt aufrecht ab und landet im Sitzen oder Liegen. Wir können daher den Weitsprung nicht einfach als einen symmetrischen schrägen Wurf beschreiben, sondern müssen uns einen verfeinerten Ansatz einfallen lassen.

Eine elegante Lösung besteht darin, den unsymmetrischen schrägen Wurf gedanklich in zwei Hälften zu zerlegen und ihn sich aus zwei zusammengesetzten halben Wurfparabeln vorzustellen (Abbildung 8). Wir können dann zur Beschreibung der beiden unterschiedlichen halben Parabeln

jeweils die Gleichungen für den schrägen Wurf verwenden, und die Gesamtweite des Sprungs ist die Summe der beiden Teilweiten w_1 und w_2 .

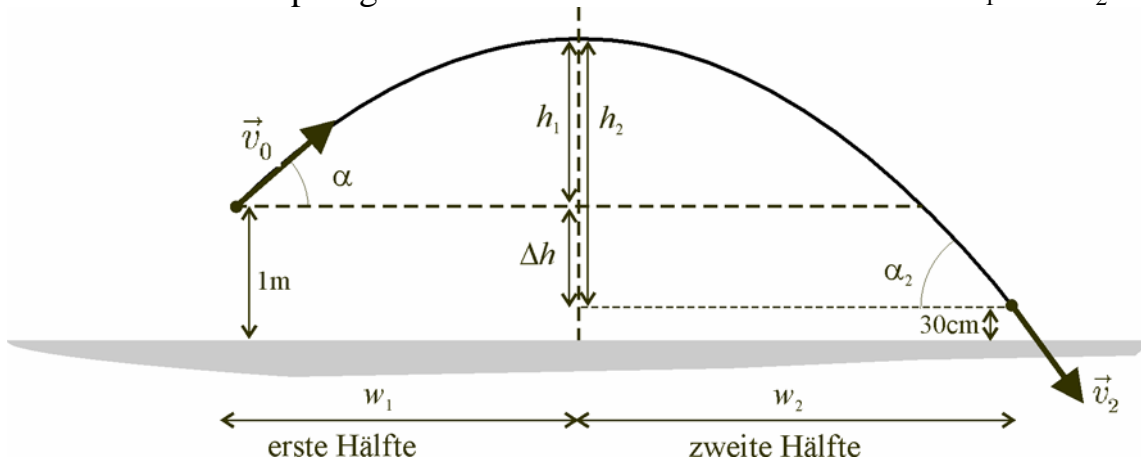


Abb. 8: Modellieren des Weitsprungs mit zwei halben Wurfparabeln

Die erste Hälfte des Sprungs ist einfach zu beschreiben. Wir setzen wir den Absprungwinkel α und die Absprunggeschwindigkeit $|\vec{v}_0|$ in die Formel (6) für die Wurfweite ein. Wir wählen $\alpha = 25^\circ$ und $|\vec{v}_0| = 10 \text{ m/s}$. Mit diesen Werten erhalten wir:

$$w_1 = \frac{1}{2} \frac{|\vec{v}_0|^2 \sin 2\alpha}{g} = 3,90 \text{ m.} \quad (8)$$

Mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigen wir, dass wir nur die Hälfte der Wurfparabel betrachten.

Bei der zweiten Hälfte des Sprungs wird es schwieriger. Der „Landewinkel“ α_2 ist ein anderer als α , und auch die Landegeschwindigkeit $|\vec{v}_2|$ hat einen anderen Wert als die Absprunggeschwindigkeit. Wir müssen zwei Gleichungen für die beiden unbekannt GröÙen $|\vec{v}_2|$ und α_2 suchen, damit wir sie aus bekannten GröÙen berechnen und in Formel (6) einsetzen können.

Dazu stellen wir zuerst fest, dass die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit $|\vec{v}| \cos \alpha$ während des gesamten Sprungs konstant bleibt (wir erinnern uns, dass der Springer sich nach dem Trägheitsgesetz in horizontaler Richtung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt). Insbesondere gilt dies auch für die Horizontalkomponente von Absprunggeschwindigkeit \vec{v}_0 und Landegeschwindigkeit \vec{v}_2 . Wir erhalten so die erste der beiden gesuchten Gleichungen (vgl.(5)):

$$|\vec{v}_0| \cos \alpha = |\vec{v}_2| \cos \alpha_2. \quad (9)$$

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Geometrie des Sprungs. Der Körperschwerpunkt befindet sich beim Absprung in einer Höhe von ungefähr einem Meter; im Moment des Aufkommens liegt er niedriger. Die

Höhendifferenz Δh beträgt etwa 70 cm (Abbildung 8). Die Höhen der beiden halben Wurfparabeln sind daher folgendermaßen verknüpft:

$$h_2 = h_1 + \Delta h$$

Einsetzen der Wurfhöhen aus Gleichung (7) ergibt:

$$\frac{|\vec{v}_2|^2 \sin^2 \alpha_2}{2g} = \frac{|\vec{v}_0|^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \Delta h. \quad (10)$$

Durch Multiplizieren der Gleichung auf beiden Seiten mit $2g$ erhalten wir:

$$|\vec{v}_2|^2 \sin^2 \alpha_2 = |\vec{v}_0|^2 \sin^2 \alpha + 2g \Delta h. \quad (11)$$

Nun addieren wir auf beiden Seiten $|\vec{v}_0|^2 \cos^2 \alpha$ und benutzen die Relation (9):

$$|\vec{v}_2|^2 (\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2) = |\vec{v}_0|^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2g \Delta h. \quad (12)$$

Der Ausdruck in Klammern ist aber auf beiden Seiten gleich 1, so dass sich ergibt:

$$|\vec{v}_2|^2 = |\vec{v}_0|^2 + 2g \Delta h. \quad (13)$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir die Bestimmungsgleichung für $|\vec{v}_2|$:

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2 + 2g \Delta h}. \quad (14)$$

Mit den Gleichungen (9) und (14) liegen nun die beiden Relationen vor, mit denen wir die unbekanntenen Größen $|\vec{v}_2|$ und α_2 berechnen können (die gleichen Relationen hätten wir übrigens durch Anwenden von Energie- und Impulssatz statt wie hier geometrisch gewinnen können).

Der Rest ist einfach: Zunächst ermitteln wir die Parameter für die zweite Sprunghälfte aus den als bekannt vorausgesetzten Werten $\alpha = 25^\circ$ und $|\vec{v}_0| = 10$ m/s:

$$\alpha_2 = 31,8^\circ \quad \text{und} \quad |\vec{v}_2| = 10,66 \text{ m/s.}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (6) erhalten wir die Weite der zweiten Sprunghälfte (wobei wir den Faktor $\frac{1}{2}$ für die halbe Parabel nicht vergessen):

$$w_2 = \frac{1}{2} \frac{|\vec{v}_2|^2 \sin 2\alpha_2}{g} = 5,18 \text{ m.} \quad (15)$$

Mit diesem Ergebnis können wir zum eigentlichen Zweck unserer Betrachtung zurückkommen: Der Berechnung der Gesamtweite w des Sprungs aus den beiden Teilweiten w_1 und w_2 :

$$w = w_1 + w_2 = 3,90 \text{ m} + 5,18 \text{ m} = 9,08 \text{ m.}$$

Dieses Ergebnis liegt bemerkenswert nahe am gegenwärtigen Weltrekord von 8,95 m. Unser Modell und die Annahmen für die beiden Parameter α und $|\vec{v}_0|$ scheinen also der Realität durchaus recht nahe zu kommen. Man sieht aber auch, dass die Spitzensportler ihre Technik so weit entwickelt haben, dass sie mit ihren besten Sprüngen das unter den gegebenen Bedingungen physikalisch Mögliche fast optimal ausschöpfen.

Wie weit lässt sich der Weitsprungweltrekord noch steigern? Größere Weiten lassen sich durch eine höhere Absprunggeschwindigkeit und einen größeren

Absprungwinkel erzielen. In Abbildung 9 ist die Sprungweite für verschiedene Absprunggeschwindigkeiten und Absprungwinkel gezeigt. Der optimale Absprungwinkel liegt in der Nähe von 45° , bei etwa 42° (dass es nicht genau 45° sind liegt am unsymmetrischen Verlauf des Sprungs). Das bedeutet: Die üblichen flachen Absprungwinkel sind alles andere als optimal. Wie aber schon weiter oben diskutiert wurde, sind steilere Winkel aus physiologischen Gründen wohl kaum zu erreichen. Der eher flache Verlauf der Kurven in Abbildung 9 zeigt aber auch, dass die Abhängigkeit der Weite vom Winkel nicht allzu stark ist: Eine Verbesserung beim Absprungwinkel führt nur zu relativ geringfügigen Verbesserungen in der Weite.

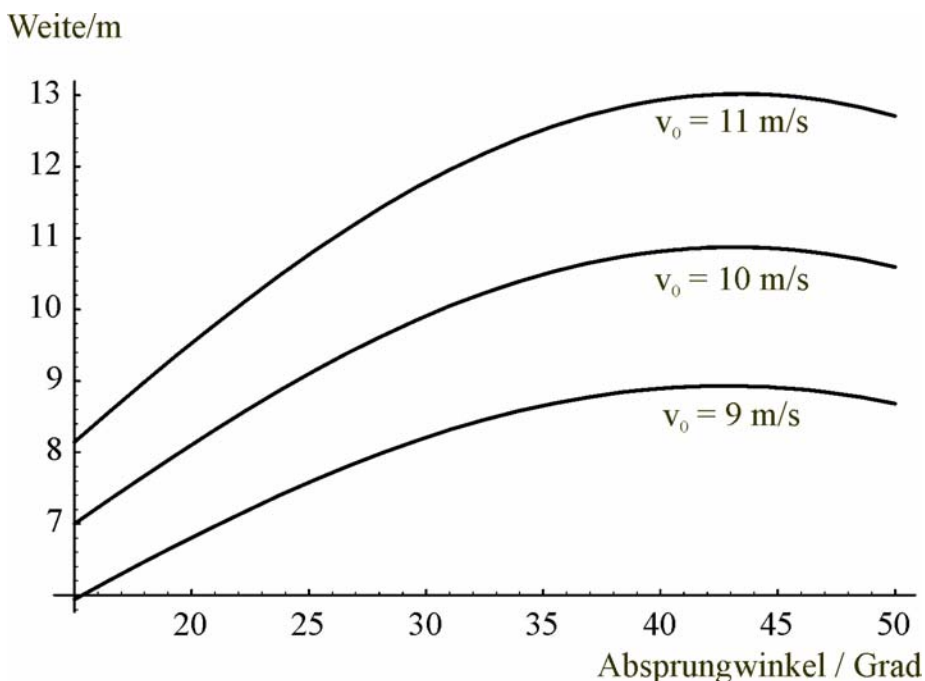


Abb. 9: Maximale Weite beim Weitsprung als Funktion der Geschwindigkeit und des Absprungwinkels

Anders sieht es bei der Absprunggeschwindigkeit aus: Wie wir aus der quadratischen Abhängigkeit der Wurfweite von der Geschwindigkeit schon vermutet hatten, führt eine Erhöhung der Geschwindigkeit zu einer deutlichen Verbesserung bei der Weite. Man sieht aber auch, dass man mit etwa 10 m/s schon Weltklasse-Geschwindigkeiten braucht, um auf wirklich gute Weiten zu kommen. Nur erstklassige Sprinter können den Weitsprung-Weltrekord gefährden.

Um mit aller Vorsicht eine Prognose für den „endgültigen Weitsprung-Weltrekord“ zu wagen, gehen wir von unveränderten Absprungwinkeln aus, setzen aber die höchsten bisher gemessenen Momentangeschwindigkeiten beim Sprint an, die bei etwa 11 m/s liegen. Wenn es durch Verbesserungen der Technik gelänge, eine solche Geschwindigkeit beim Absprung beizubehalten, könnten die Springer Weiten von bis zu zehn Metern erzielen.

4 Literatur

- [1] H. Muckenfuß, Lernen im sinnstiftenden Kontext, Cornelsen, Berlin 1995
- [2] Reinmann-Rothmeier und Mandl, Unterrichten und Lernumgebungen gestalten, in: A. Krapp, B. Weidenmann (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. 4. Aufl., Beltz, Weinheim 2001
- [3] R. Müller, Physik anwendungsorientiert lehren, Tagungs-CD: Didaktik der Physik, Beiträge zur 68. Physikertagung Düsseldorf 2004