INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

MECHANIK WS 2000/2001

8. Übungsblatt Abgabe: 5.12.00

16. **Lissajous-Figuren**

Betrachtet wird ein dreidimensionaler harmonischer Oszillator mit richtungsabhängiger Rückstellkraft $\mathbf{F} = -(D_x x, D_y y, D_z z)$.

(a) Ist das Kraftfeld konservativ? Wenn ja, geben Sie das Potential an.

(b) Handelt es sich bei der Kraft um eine Zentralkraft? Ist der Drehimpuls erhalten? Ist die allgemeine Bewegung eben?

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(d) Geben Sie ein Kriterium für das Frequenzverhältnis $\omega_x/\omega_y/\omega_z$ an, so daß die Bewegung periodisch verläuft. ($\omega_i = \sqrt{D_i/m}$).

(e) Zeichnen Sie die Bahnkurven (Lissajous-Figuren) in der xy Ebene mit $x_0 = v_{x0} = y_0 = v_{y0} = 1$, $z_0 = v_{z0} = 0$, $\omega_x = 1$, $\omega_y = 2, 3, 2.4, 0.679$. Hierzu können Sie natürlich Computerprogramme Ihrer Wahl verwenden.

17. **Variationsrechnung**

Für Fluggesellschaften ist es von Bedeutung, den schnellsten Weg von einem Ort zum anderen zu finden: Gesucht ist also die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

(a) Zeigen Sie, daß der Abstand zweier Punkte als

$$A = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} du$$

dargestellt werden kann, wobei $\dot{x} = \frac{dx}{du}$, und u ist der Bahnparameter.

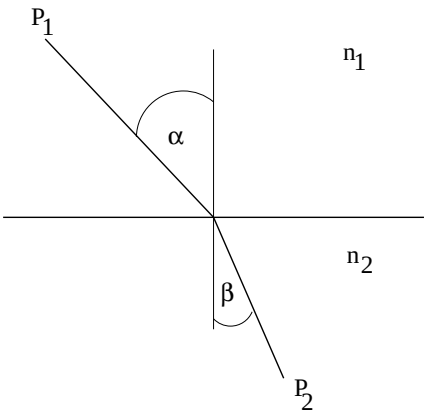
(b) Zeigen Sie, daß das Variationsproblem auf die Differentialgleichung $2\lambda\mathbf{r} + \frac{d}{du}\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = 0$ führt, wobei λ ein Lagrangeparameter ist.

(b) Ersetzen Sie in dieser Differentialgleichung die Ableitungen nach u durch Ableitungen nach s.

(c) Multiplizieren Sie die Gleichung vektoriell mit $\mathbf{r}$ und integrieren Sie einmal.

(d) Wenn Sie die Gleichung jetzt mit $\mathbf{r}$ skalar multiplizieren können Sie das Ergebnis ablesen.

18. **Fermat'sches Prinzip**



Das Fermat'sche Prinzip der geometrischen Optik besagt, daß ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 denjenigen Weg wählt, für den die optische Weglänge

$$\Delta = \int_{P_1}^{P_2} n(s)ds$$

extremal wird, wobei $n(s)$ der Brechungsindex ist. Leiten Sie daraus das Brechungsgesetz $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$ für die Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zweier Medien der Brechungsindizes n_1 und n_2 her.