INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

MECHANIK — WS 2000/2001

7. Übungsblatt — Abgabe: 28.11.00

---

14. **Dreidimensionaler harmonischer Oszillator**

Ein Massenpunkt bewegt sich im Potential

$$V = \lambda \mathbf{r}^2 \qquad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion und die Gesamtenergie des Systems in ebenen Polarkoordinaten an. Bestimmen Sie die zyklische Koordinate und die zugehörige Erhaltungsgröße, den Drehimpuls L.

(b) Verwenden Sie den Drehimpuls, um die Winkelabhängigkeit der Energie zu eliminieren. Skizzieren Sie das daraus resultierende effektive Potential

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2mr^2}$$

für die Fälle $L = 0$ und $L \neq 0$. Argumentieren Sie anhand Ihrer Skizzen, wie die Bahnen qualitativ aussehen.

(c) Folgern Sie aus der Drehimpulserhaltung $\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}$ und ersetzen Sie im Ausdruck für die Energie die zeitliche durch eine Winkelableitung.

(d) Trennen Sie in der Gleichung für die Energie die Variablen r undd φ und gewinnen Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$ durch Integration. Substitution von $r = 1/\sqrt{x}$ ist hier hilfreich. Was für eine Bahnkurve ist das, wo liegt das Kraftzentrum.

(e) Transformieren Sie die Bahnkurve in kartesische Koordinaten. Die beiden Koordinatenachsen sollen hierbei so gewählt werden, daß sie in die Richtungen extremaler Auslenkung der Bahn zeigen.

15. **Zweidimensionaler harmonischer Oszillator**

Ein Massenpunkt bewegt sich im Potential $V = \lambda(x^2 + y^2)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichung in kartesichen Koordinaten in zwei unabhängige Bewegungen zerfällt. Demzufolge können sofort 3 Erhaltungsgrößen angegeben werden, nämlich die Energien E_x und E_y der beiden unabhängigen Bewegungen, sowie der Drehimpuls L (Hinweis: L steht senkrecht zur Bahn, also ist nur $L_z \neq 0$). Geben Sie die Erhaltungsgrößen als Funktion von x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ an.

(b) Ersetzen Sie im Ausdruck für das Quadrat des Drehimpuls L^2 jeweils $\dot{x}^2$ und $\dot{y}^2$ mit Hilfe von E_x bzw. E_y.

(c) Zeigen Sie, daß $I_4 = \dot{x}\dot{y} + \frac{\lambda}{m}xy$ eine Erhaltungsgröße ist. Verwenden Sie I_4 um den Ausdruck aus (b) zu vereinfachen. Sie erhalten so die Bahnkurve in kartesischen Koordinaten. Offensichtlich macht die Kenntnis ausreichend vieler Erhaltungsgrößen die Integration der Bewegungsgleichungen überflüssig.

(d) Zeigen Sie, daß die Bahnkurve aus (c) äquivalent mit der aus Aufgabe 14 (e) ist.