INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK — SS 2009

14. Übungsblatt — Abgabe: Do, 02.07.09 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

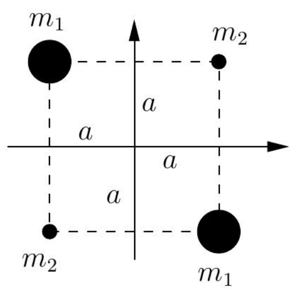
Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Starrer Körper, Eulersche Winkel, Steinerscher Satz

38. **Trägheitstensor I: Massenpunktsystem** **(5 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie den Trägheitstensor für die Anordnung von Massenpunkten aus untenstehender Skizze im skizzierten Koordinatensystem.

(b) Transformieren Sie den Trägheitstensor ins Hauptachsensystem



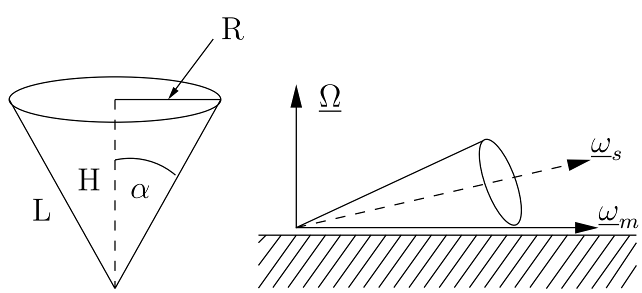
39. **Trägheitstensor II: Inhomogene Kugel** **(5 Punkte)**

Berechnen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitstensor für eine Kugel mit der Massendichte

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha \cos\vartheta + \beta \cos^2\vartheta)$$

in Kugelkoordinaten r, φ, ϑ mit $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

40. **Rollender Kegel** **(10 Punkte)**



Bitte wenden →

Gegeben sei ein Kegel mit halbem Öffnungswinkel α, Radius R, Höhe H und Masse M.

(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor und die Rotationsenergie T_{rot} des Kegels bei Rotation mit ω_m um eine Seitenkante.

(b) Wir betrachten nun die Situation, dass der Kegel ohne zu rutschen auf der Ebene rollt. Anstatt die Seitenkante als momentane Drehachse $\underline{\omega}_m$ zu betrachten, kann man das Abrollen des Kegels auch als Drehung mit Winkelgeschwindigkeit $\underline{\Omega}$ um die Spitze des Kegels plus Drehung mit Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}_s$ um die Symmetrieachse auffassen. Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) dann umformen lässt zu

$$T_{rot} = \frac{3}{10}\frac{H^2}{R^2}\Omega^2 M \sin^2\alpha \left(\frac{3}{2}H^2 + \frac{R^2}{4}\right) \quad .$$

(c) Man betrachte nun eine um den Winkel γ geneigte schiefe Ebene, auf der sich der Kegel (wiederum ohne zu rutschen) abrollt. Die Spitze des Kegels kann sich wegen der Abrollbedingung nicht bewegen. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion sowie die Bewegungsgleichungen und leiten Sie daraus die Schwingungsfrequenz für kleine Schwingungen um die Ruhelage ab.

Hinweise: Zur Bestimmung der potentiellen Energie könnten Sie einen Punkt P auf der Seitenkante des Kegels betrachten. Die potentielle Energie des Schwerpunkts unterscheidet sich von der des Punktes P dann nur um eine Konstante, die für die Lösung des Problems unerheblich ist. Als generalisierte Koordinate eignet sich Φ mit $\dot{\Phi} = \Omega$.