INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK — SS 2009

13. Übungsblatt — Abgabe: Do, 25.06.09 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Wirkungsfunktion, Phasenraum, Satz von Liouville

35. **Bewegung im Zentralkraftfeld** **(12 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten die Hamiltonsche Funktion für die Bewegung in einem Zentralkraftfeld mit dem Potential $V(r)$ die Form

$$\mathcal{H}(r,\vartheta,\varphi,p_r,p_\vartheta,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) + V(r)$$

hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung und dem Separationsansatz

$$S = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + W_\varphi(\varphi) - Ut \quad ,$$

dass drei Konstanten

$$a_\varphi = p_\varphi, \quad a_\vartheta = \sqrt{p_\vartheta^2 + \frac{a_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{a_\vartheta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

der Bewegung existieren.

(c) Erläutern Sie die anschauliche Bedeutung der Konstanten. Betrachten Sie dazu den Drehimpuls.

(d) Im Folgenden betrachten wir den Fall $\vartheta = const$, also eine ebene Bewegung im Zentralfeld. Geben Sie die Wirkungsfunktion S an. Bestimmen Sie daraus die Bahnkurve in der Form $\varphi = \varphi(r)$ und $t = t(r)$.

36. **Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung** **(3 Punkte)**

(a) Berechnen Sie mit der Lösung aus Aufgabe 34 für den eindimensionalen harmonischen Oszillator die Phasenraumintegrale

$$J = \oint p\,dq \quad \text{und} \quad J' = \oint p'\,dq'$$

über eine volle Periode. Dass beide Integrale denselben Wert ergeben ist kein Zufall, sondern eine fundamentale Aussage: Das Phasenraumintegral $\int p\,dq$ ist invariant unter kanonischer Transformation.

(b) Die sogenannte Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung besagt, dass für periodische Bewegungen $J = nh$ gilt, wobei h das Planksche Wirkunsquantum und n eine positive, ganze Zahl ist. Zeigen Sie, dass demzufolge für die "gequantelten" Energiewerte des harmonischen Oszillators

$$U_n = n\frac{h}{2\pi}\omega = n\hbar\omega$$

gilt.

Anmerkung: Dieselbe Überlegung angewandt auf das Keplerproblem führt auf die Energiequantisierung des Wasserstoffatoms, mit dem Bohr die Spektrallinien des Wasserstoffs erfolgreich erklären konnte (Bohrsches Atommodell).

37. **Satz von Liouville** **(5 Punkte)**

Man überprüfe den Satz von Liouville für den Fall eines elastischen Stoßes zweier Massenpunkte, die sich auf einer Geraden bewegen, indem man die Konstanz eines Phasenvolumenelements $d\Omega$ zeigt.

Anleitung: Nehmen Sie den Impuls der Teilchen vor dem Stoß (und damit auch nach dem Stoß) als konstant an. Zeigen Sie dann getrennt die Erhaltung des Phasenraumvolumens für die Bewegung vor den Stoß, nach dem Stoß und beim Stoß. Die Impulse nach dem Stoß dürfen dabei ohne Rechnung aus der Literatur übernommen werden.