INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK — SS 2009

12. Übungsblatt — Abgabe: Do, 18.06.09 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

**Fragen zu den Aufgaben:** H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

**Stichworte**: Hamiltonsches Prinzip, Poissonklammern, Kanonische Transformation

32. **Hamiltonsche Bewegungsgleichungen** **(7 Punkte)**

Bestimmen Sie für die Bewegung längs der Kurve $x_1^2 + ax_2^3 = 0$ aus Aufgabe 25e die Hamiltonsche Funktion $\mathcal{H}$ und die Hamiltonschen Gleichungen an. Als generalisierte Koordinate verwende man $x_2$. Reproduzieren Sie daraus die bereits bekannte Bewegungsgleichung für $x_2$.

33. **Poissonklammern** **(6 Punkte)**

$\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ sei der dreidimensionale Drehimpulsvektor. $(q_1, q_2, q_3)$ ist der kartesische Ortsvektor und $(p_1, p_2, p_3)$ der kanonisch konjugierte Impulsvektor. $A$, $B$ und $C$ seien beliebige skalare Funktionen. Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Poissonklammern:

(a) $\{A, B\} = -\{B, A\}$
(b) $\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B$
(c) $\{L_1, q_2\} = q_3$
(d) $\{L_1, p_2\} = p_3$

34. **Kanonische Transformation** **(7 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 \qquad & q_1' &= q_1 - p_1 \\ p_2' &= p_2 \qquad & q_2' &= q_2 - p_2 \\ p_3' &= p_3 \qquad & q_3' &= q_3 - p_3 \end{aligned}$$

kanonisch ist. Sie dürfen dabei annehmen, dass $\mathcal{H}$ nicht explizit zeitabhängig ist.

(b) Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \quad .$$

Transformieren Sie die Koordinaten $q, p$ in die neuen Koordinaten $q', p'$ mittels einer kanonischen Transformation, deren Erzeugende durch

$$R = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot q'$$

gegeben ist. Geben Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'(q', p')$ an und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in diesen neuen Koordinaten. Transformieren Sie danach die Lösung wieder auf die alten Koordinaten $q$ und $p$.