INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK SS 2009

11. Übungsblatt Abgabe: Do, 11.06.09 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Trägheitskräfte, L II, Eindeutigkeit der Lagrange-Funktion, Variationsrechnung

29. **Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld** **(4 Punkte)**

In der Elektrodynamik werden wir zeigen, dass wir die elektrische Feldstärke $\underline{E}$ und die magnetische Induktion $\underline{B}$ aus dem skalaren Potential $\Phi(\underline{x}, t)$ und dem Vektorpotential $\underline{A}(\underline{x}, t)$ ableiten können gemäß

$$\underline{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \underline{A} \quad , \qquad \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad .$$

Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen mit dem geschwindigkeitsabhängigen Potential

$$V(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = e\Phi(\underline{x}, t) - e\underline{A}(\underline{x}, t) \cdot \dot{\underline{x}}$$

auf die Lorentzkraft führen (Beachten Sie die Kettenregel).

30. **Foucaultsches Pendel** **(12 Punkte)**

Bei einem (gut gelagerten) Pendel dreht sich die Schwingungsebene aufgrund der Erdrotation (Foucaultsches Pendel). Diese Bewegung soll genauer untersucht werden. Dazu sei ein Koordinatensystem eingeführt, dessen z -Achse zum Erdmittelpunkt zeigt und dessen Ursprung im Pendelaufhängepunkt liegt. Die Rotation des Ursprungs um den Erdmittelpunkt kann außer acht gelassen werden ($\underline{v}_{tr} = 0$). Das System rotiert aber in sich mit $\underline{\omega} = (\omega_1, 0, \omega_3)$. Die Gravitationskraft wirkt in positive z -Richtung, also ist $V = -mgz$. Unter Vernachlässigung der quadratischen Terme in $\underline{\omega}$ ergibt sich die Langrange-Funktion im rotierendes KS als

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\underline{x}}^2 + m\dot{\underline{x}}(\underline{\omega} \times \underline{x}) + mgz \quad .$$

(a) Führen Sie Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ein und entwickeln Sie $\mathcal{L}$ bis zur zweiten Ordnung in ϑ. Es gilt natürlich die Nebenbedinung $r = l$, wenn l die Länge des Pendels ist. Man beachte, daß im gewählten KS $\vartheta = 0$ der Ruhelage entspricht.

(b) Zeigen Sie, daß sich die so erhaltene Lagrange-Funktion von

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = ml^2 \left(\frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}^2 + \vartheta^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \omega_3 \vartheta^2 \dot{\varphi} - \frac{\Omega^2}{2} \vartheta^2 \right) \qquad \text{mit} \quad \Omega^2 = \frac{g}{l}$$

nur um eine totale zeitliche Ableitung unterscheidet.

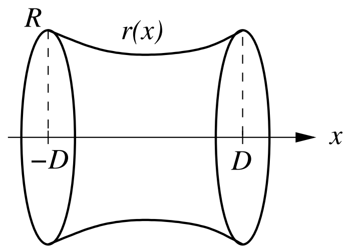
(c) Zeigen Sie: Sind $\vartheta_0(t)$ und $\varphi_0(t)$ Lösungen der Lagrange-Gleichungen (von $\tilde{\mathcal{L}}$) für $\omega_3 = 0$, dann sind $\vartheta(t) = \vartheta_0(t)$ und $\varphi(t) = \varphi_0(t) - \omega_3 t$ Lösungen der Lagrange-Gleichungen für $\omega_3 \neq 0$ bis auf quadratische Terme in ω_3.

(d) Es verbleibt, die Lösungen ϑ_0 und φ_0 zu bestimmen. Durch die Substitutionen

$$\xi = \vartheta \cos\varphi \quad , \quad \eta = \vartheta \sin\varphi$$

vereinfacht sich $\tilde{\mathcal{L}}$ (mit $\omega_3 = 0$) erheblich. Bestimmen Sie daraus die Lösungen ϑ_0 und φ_0 für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\vartheta}(0) = 0$ und $\vartheta(0) = \theta$. Geben Sie dann die endgültigen Lösungen $\vartheta(t)$ und $\varphi(t)$ für $\omega_3 \neq 0$ an. Um wieviel Grad verdreht sich die Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels pro Stunde in Braunschweig?

31. **Variationsrechnung I - Minimale Oberfläche** **(4 Punkte)**



Zwei Kreisringe mit Radius R und Abstand $2D$ sind durch eine Seifenhaut verbunden. Die Form $r(x)$ dieser Haut stellt sich so ein, dass die Oberfläche minimal wird.

(a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Minimierung der Oberfläche der Minimierung des Funktionals

$$S = 2\pi \int_{-D}^{+D} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

entspricht.

(b) Bestimmen Sie die Eulerschen Gleichungen für dieses Variationsproblem (die Langrange-Gleichungen 2. Art).

(c) Zeigen Sie, dass

$$r(x) = a\cosh(x/a)$$

diese Gleichungen löst.