



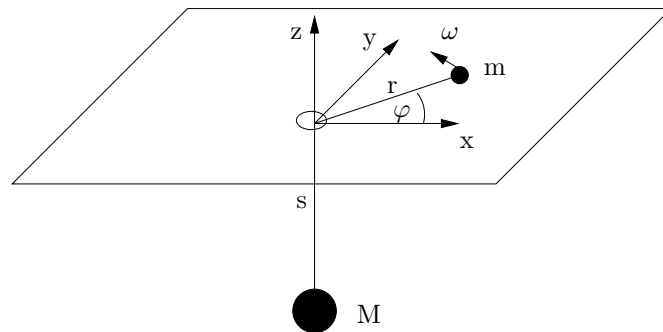
Stichworte: Zwangskraft, generalisierte Koordinaten, Lagrangefunktion

26. Ein Massenpunkt auf einer Kugel (7 Punkte)

Ein Massenpunkt m soll sich unter dem Einfluss des homogenen Schwerfelds der Erde auf einer Kugeloberfläche vom Radius R bewegen. In welcher Höhe z_0 und mit welcher Geschwindigkeit v_0 springt der Massenpunkt von der Kugeloberfläche ab, wenn er sich anfangs im labilen Gleichgewicht befindet und dann eine infinitesimale Anfangsgeschwindigkeit erhält?

Hinweise: Bestimmen Sie zunächst die Zwangskraft und benutzen Sie dann die Energieerhaltung.

27. Zwei verbundene Massen und ein Loch im Tisch (6 Punkte)



Zwei Massen m und M sind durch einen Faden mit der konstanten Gesamtlänge $l = r + s$ verbunden, wobei die Masse des Fadens vernachlässigt werden kann. Die Masse m kann an dem Faden (mit der variierenden Teillänge r) auf der Ebene rotieren. Der Faden führt von m durch ein Loch in der Ebene zu M , wobei die Masse M an dem straff gespannten Faden (mit der ebenfalls veränderlichen Teillänge $s = l - r$) hängt. Dabei soll sich die Masse M nur in Richtung der z -Achse bewegen können.

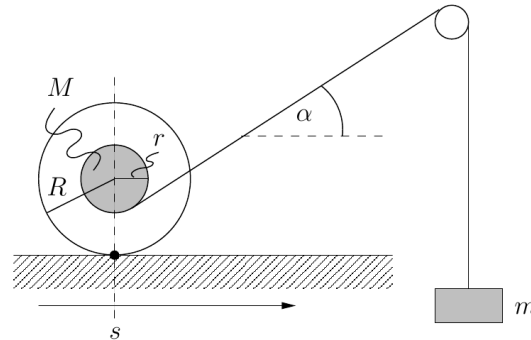
- Stellen Sie Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen auf.
- Zeigen Sie, dass der Drehimpuls L in der Zeit erhalten bleibt.
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von ω oder L , wann die Masse M nach oben bzw. nach unten rutscht.

Bitte wenden →

28. Die Garnrolle

(7 Punkte)

Man bestimme die Bewegungsgleichung für eine Garnrolle (s. Skizze). Die Garnrolle besteht aus zwei Scheiben mit Radius R und vernachlässigbarer Masse und einem inneren Zylinder mit Radius r und Masse M , auf dem ein Faden aufgewickelt wird. Die äußeren Scheiben rollen reibungsfrei auf einer Unterlage, ohne zu Rutschen, d.h. der Gleitreibungswiderstand ist unendlich groß, der Rollreibungswiderstand sei vernachlässigbar. Es wirkt eine beschleunigende Kraft, die von dem Gewicht der Masse m ausgeübt wird. Der in der Skizze eingezeichnete Winkel α sei als konstant angenommen (das gilt näherungsweise, wenn die Länge des abgerollten Fadens bis zur Umlenkrolle sehr groß ist gegenüber dem Radius R).



- (a) Geben Sie die Lagrangefunktion des Gesamtsystems als Funktion der generalisierten Koordinate s (Position der Garnrolle) an.
Hinweise: Die Höhenänderung der Masse m wird durch Translation und Drehung der Garnrolle verursacht. Zudem ist die Rotationsenergie der Rolle durch $T_{rot} = 1/2 \Theta \dot{\varphi}^2$ mit $\Theta = 1/2 M r^2$ gegeben.
- (b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für s ab.
- (c) Die Rolle sei zu Beginn des Vorgangs in Ruhe ($s(0) = 0$). Für kleine Winkel α würde die Rolle nach rechts loslaufen, während sie für große α nach links läuft. Bestimmen Sie den Grenzwinkel α_c .