INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK — SS 2009

6. Übungsblatt — Abgabe: Do., 30.04.09 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Erhaltungsgrößen und Bahnkurven beim Keplerproblem, Periheldrehung

15. **Runge-Lenz-Vektor** **(5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass bei der Bewegung im Potential

$$V = -\alpha/|\underline{x}|$$

der Vektor

$$\underline{A} = \frac{1}{\alpha}\,\underline{v} \times \underline{L} - \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$$

eine Konstante der Bewegung darstellt und senkrecht auf dem Drehimpuls steht.

(b) Zeigen Sie:

$$\underline{x} \cdot \underline{A} = \frac{|\underline{L}|^2}{\alpha m} - |\underline{x}| \quad . \tag{1}$$

(c) Führen Sie in der Ebene senkrecht zu $\underline{L}$ Polarkoordinaten (ρ, φ) so ein, dass $\underline{A}$ in die Richtung $\varphi = 0$ zeigt und folgern sie aus Gleichung (1), dass sich als Bahnkurven Kegelschnitte der Form

$$\rho(\varphi) = \frac{\frac{|\underline{L}|^2}{\alpha m}}{1 + |\underline{A}|\cos\varphi}$$

ergeben. Begründen Sie, dass $\underline{A}$ zum Perihel zeigt und sein Betrag die Exzentrizität der Bahn darstellt.

Der Runge-Lenz-Vektor bietet somit eine alternative Möglichkeit, die Bahngleichung für das Keplerproblem herzuleiten!

16. **Parabelförmige Bahn** **(7 Punkte)**

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn in der Ekliptik (Bahnebene der Erde) um die Sonne. Der Perihelabstand betrage ein Drittel des Erdbahnradius. Die Erdbahn sei als kreisförmig angenommen. Bestimmen Sie die Zeit T, die sich der Komet innerhalb der Erdbahn aufhält.

Hinweis: Sie könnten von der Drehimpulserhaltung ausgehen und T zunächst in Abhängigkeit von $\underline{L}$ ausdrücken.

Bitte wenden →

17. **Periheldrehung** **(8 Punkte)**

Ein Planet der Masse m bewegt sich in einem zentralsymmetrischen Potential $V(\varrho)$, in dessen Ursprung die Sonne steht. Die Bewegung verläuft im Endlichen, es liegt also der „gebundene Fall“ vor.

(a) Zeigen Sie, dass die Änderung des Polarwinkels φ zwischen sonnennächstem und sonnenfernstem Punkt (ϱ_{min} und ϱ_{max}) gegeben ist durch

$$\Delta\varphi = -m\frac{\partial}{\partial L}\int\limits_{\varrho_{\text{min}}}^{\varrho_{\text{max}}}\sqrt{\frac{2}{m}(U-V)-\frac{L^2}{m^2\varrho^2}}\,d\varrho \qquad .$$

(b) Für den Fall $V(\varrho) = -\gamma mM/\varrho$ ergeben sich bekanntermaßen geschlossene Ellipsen, $\Delta\varphi$ ist demnach gerade π oder bei einem vollen Umlauf gerade 2π. Fügt man eine kleine, zentralsymmetrische Störung ins Potential ein

$$V(\varrho) = V_0(\rho) + V_1(\rho) = -\gamma\frac{mM}{\varrho} + V_1(\varrho) \quad , \quad V_1 \ll V_0 \quad ,$$

so beschreibt der Körper immer noch näherungsweise Ellipsen, deren Halbachsen sich jedoch bei jedem Umlauf nicht mehr nur um $2\Delta\varphi = 2\pi$, sondern um den Winkel $2\Delta\varphi = 2\pi + \delta\varphi$ verdrehen (Periheldrehung).

Bestimmen Sie die Periheldrehung , indem Sie die Wurzel gemäß $\sqrt{a+x} \approx \sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}\,x$ entwickeln. Sie sollten als Ergebnis

$$\Delta\varphi \approx \pi + m\frac{\partial}{\partial L}\int\limits_0^{\pi}\frac{\rho^2}{L}V_1\mathrm{d}\varphi$$

erhalten.

(c) Berechnen Sie die Periheldrehung konkret für ein Störpotential der Form $V_1(\varrho) = -\alpha/\rho^2$.

Anmerkung: Solche Störterme treten in der Realität tatsächlich auf, z.B. durch die Abplattung der Sonne aufgrund ihrer Eigenrotation oder auch durch allgemein relativistische Effekte. Wie man am Ergebnis sieht, ist die Periheldrehung umso größer, je kleiner die Masse des Planeten ist, daher wurde sie auch zuerst beim Merkur beobachtet und war eine der ersten experimentellen Bestätigungen der Relativitätstheorie.