INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK — SS 2009

5. Übungsblatt — Abgabe: Do., 23.04.09 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Inertialsystem, Trägheitskräfte, Eindimensionale Bewegung

12. **Abhängigkeit der Erdbeschleunigung von der Geographischen Breite (4 Pt.)**

Wir betrachten ein Inertialsystem Σ, dessen Ursprung mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt, und ein rotierendes System Σ', dessen Ursprung auf der Erdoberfläche liegt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann für die Kraft im bewegten System gilt

$$m\, d_t'^2 \underline{x}' = \underline{F} - m\, \underline{a}_{tr} - m\, d_t' \underline{\omega} \times \underline{x}' - m\, \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2\, m\, \underline{\omega} \times d_t' \underline{x}' \quad . \tag{1}$$

Hiervon ausgehend wollen wir nun die Schwerebeschleunigung $\underline{g}$ in Abhängigkeit vom Breitengrad θ bestimmen. Es soll dabei sowohl die Abplattung der Erde infolge der Erd-rotation als auch die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden.

(a) Wir nehmen an, dass im Inertialsystem nur die Schwerkraft wirkt. Zeigen Sie, dass man dann (1) umschreiben kann zu

$$m\, d_t'^2 \underline{x}' = m\underline{g} - m\, d_t' \underline{\omega} \times \underline{x}' - m\, \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2\, m\, \underline{\omega} \times d_t' \underline{x}' \quad . \tag{2}$$

mit

$$\underline{g} = -\gamma \frac{M_{Erde}}{R^2} \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}) \quad .$$

$\underline{R}$ bezeichnet hierbei den Vektor zur Erdoberfläche. Machen Sie sich dazu anhand der Herleitung von Gleichung (1) klar, wie man $\underline{a}_{tr}$ umschreiben könnte.

(b) Bestimmen Sie die Schwerebeschleunigung $\underline{g}$ in Abhängigkeit von der geographischen Breite θ. Dazu soll die Erde als Ellipsoid mit den Halbachsen $a = r_{\text{Pol}}$ und $b = c = r_{\text{Äquator}}$ betrachtet werden.

(c) Berechnen Sie $|\underline{g}|$ für den Pol, den Äquator und Braunschweig bei $\theta = 52.2667°$.
Es ist $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$, $M_{Erde} = 5.974 \cdot 10^{24}\text{kg}$, $r_{\text{Pol}} = 6357\text{km}$ und $r_{\text{Äquator}} = 6378\text{km}$.

Bitte wenden →

13. **Ostabweichung beim freien Fall auf der Erde** **(9 Punkte)**

Ausgehend von Aufgabe 12 untersuchen wir nun den freien Fall ohne Luftwiderstand auf dem rotierenden Bezugssystem Erde am Breitengrad θ. Aufgrund der Erdrotation fällt ein Körper nicht ganz senkrecht nach unten, sondern wird nach Osten hin abgelenkt. Das System Σ' wird daher so gewählt, dass x' nach Süden, y' nach Osten und z' senkrecht zur Oberfläche nach von der Erde weg zeigt.

(a) Die Größe dieser Abweichung soll in erster Ordnung bzgl. der Erdrotationskreisfrequenz ω abgeschätzt werden, d.h. alle Terme in Gleichung (2), die ω^2 oder höhere Potenzen von ω enthalten, sollen vernachlässigt werden. Zudem soll ω als zeitlich konstant angenommen werden. Zeigen Sie, dass sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\ddot{x}' &= 2\omega \sin\theta \, \dot{y}' \\
\ddot{y}' &= -2\omega \left(\cos\theta \, \dot{z}' + \sin\theta \, \dot{x}'\right) \\
\ddot{z}' &= -g + 2\omega \cos\theta \, \dot{y}'
\end{aligned}$$

ergibt.

(b) Lösen Sie das System, indem Sie die Gleichungen integrieren und dann ineinander einsetzen. Die Anfangsbedingungen sollen entsprechend einem Massenpunkt mit Anfangshöhe h und Anfangsgeschwindigkeit Null gewählt werden. Zur Vereinfachung der Ergebnisse nehmen Sie $\omega t \ll 1$ an und entwickeln Sie Sinus und Cosinus. Für y' erhalten Sie so die erwähnte Ostabweichung.

(c) Wie groß ist in Braunschweig die Ostabweichung bei einem Fall aus 100m Höhe?

14. **Eindimensionale Bewegung im Morse-Potential** **(7 Punkte)**

Ein sehr einfaches Modell für den eindimensionalen Potentialverlauf bei Molekülen ist das sogenannte Morse-Potential mit der Form

$$V(x) = V_0 \left[\left(e^{-\alpha x} - 1\right)^2 - 1\right] \quad V_0 > 0, \alpha > 0 \qquad .$$

Es soll der „gebundene Fall“ mit Gesamtenergie $U < 0$ betrachtet werden, wobei

$$U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) \quad .$$

(a) Skizzieren Sie den Potentialverlauf.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung.

(c) Berechnen Sie die Form der eindimensionalen Bewegung $x(t)$. Zeigen Sie dazu, dass die Substitution $z = \exp(-\alpha x)$ auf ein Integral der Form $\int \frac{\mathrm{d}z}{z\sqrt{az^2+bz+c}}$ führt und verwenden Sie

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z\sqrt{az^2+bz+c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin\left(\frac{2c+bz}{z\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

(d) Bestimmen Sie die Periodendauer einer Schwingung.