INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

Theoretische Mechanik — SS 2009

3. Übungsblatt — Präsenzübung

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Bogenlänge, Flächengeschwindigkeit, Krümmung, konservatives Feld, Potential, Kugelkoordinaten, Differentialgleichungen

7. **Bewegung auf der Logarithmischen Spirale**

   Ein Massenpunkt bewegt sich auf der logarithmischen Spirale

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ct}\cos t \\ e^{ct}\sin t \end{pmatrix} \quad , \quad c \neq 0$$

   (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung.

   (b) Berechnen Sie die Flächengeschwindigkeit

$$\underline{\dot{S}} = \frac{1}{2}\underline{x} \times \underline{\dot{x}}$$

   (c) Bestimmen Sie die Krümmung κ und den Krümmungsradius R der Spirale mit

$$\kappa = |d_s\underline{t}| \quad \text{und} \quad R = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{|d_s\underline{t}|} \quad ,$$

   wobei $\underline{t}$ den Tangenteneinheitsvektor an die Kurve bezeichnet und s die Bogenlänge der Kurve.

8. **Konservative Felder**

   Wir betrachten die Vektorfelder

$$\underline{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x-z \\ xyz \end{pmatrix} \quad .$$

   (a) Berechen Sie für beide Felder die Kurvenintegrale entlang der Kurven $\underline{s_1}(t)$ und $\underline{s_2}(t)$ mit

$$\underline{s_1}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0,1] \qquad ; \qquad \underline{s_2}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0,1] \quad .$$

   (b) Berechen Sie die Rotation beider Felder.

   (c) Geben Sie, wenn möglich, das Potential ϕ des Feldes an, so dass $\underline{F} = -\nabla\phi$.

9. **Kugelkoordinaten II**

   Berechnen Sie die Funktionaldeterminante in Kugelkoordinaten

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

   und zeigen Sie außerdem, dass $\underline{e}_r \times \underline{e}_\vartheta = \underline{e}_\varphi$ und $\underline{e}_r \cdot \underline{e}_\vartheta = 0$ gilt.

10. **Differentialgleichungen II**

    Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

    (a) $y' = xy^{1/3}$

    (b) $y' = e^{3x+2y}$

    (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

    (d) $(1 + x^2)y' + xy = 0$