INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THEORETISCHE MECHANIK — SS 2009

1. Übungsblatt — Präsenzübung

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Gradient, Rotation, konservatives Feld, Linienintegral

1. **Differentialoperatoren**

- Der *Gradient* eines skalaren Feldes $\Phi(\underline{x})$ ist

$$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \partial_{\underline{x}}\Phi \overset{\text{in 3D}}{=} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Phi \quad .$$

Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von Φ.

- Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{x})$ ist

$$\operatorname{div}\underline{A} = \nabla\cdot\underline{A} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \overset{\text{in 3D}}{=} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad .$$

Anschaulich stellt die Divergenz die Quellstärke von $\underline{A}$ dar.

- Die *Rotation* eines Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{x})$ ist

$$\operatorname{rot}\underline{A} = \nabla\times\underline{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_z A_x \end{pmatrix} \quad .$$

Anschaulich stellt die Rotation die Wirbelstärke von $\underline{A}$ dar.

(a) Es ist $|\underline{x}| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Berechnen Sie

(*i*) $\operatorname{grad} r$	(*ii*) $\operatorname{div}\underline{x}$	(*iii*) $\operatorname{grad}|\underline{x}-\underline{x}'|$
(*iv*) $\operatorname{grad}'|\underline{x}-\underline{x}'|$	(*v*) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$	(*vi*) $\operatorname{grad}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$
(*vii*) $\operatorname{grad}'\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$	(*viii*) $\operatorname{grad}\ln r$	

(b) Es sei

$$\underline{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x \\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{pmatrix} \quad , \quad \Phi(x,y,z) = -4xy^2 - 3xz + 8yz^3 \quad \text{und} \quad \underline{B} = \nabla\Phi \quad .$$

Berechnen Sie $\operatorname{rot}\underline{A}$, $\operatorname{rot}\underline{B} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{A}$.

(c) Zeigen Sie, dass allgemein gilt

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{F} = 0$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$$

für beliebige $\underline{F}$ und f.

2. **Linienintegral**

Als Linienintegral bezeichnen wir das Integral über ein Vektorfeld $\underline{F}$ längs eines Weges $\underline{s}(t)$:

$$\int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_1} \underline{F}\mathrm{d}\underline{s} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}(\underline{s}(t))\frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \quad .$$

Bestimmen sie das Linienintegral von $\underline{A}$ von $\underline{x}_0 = (-1,0,0)$ nach $\underline{x}_1 = (1,0,0)$ für die Wege

$$\underline{s}_1(t) = (2t-1,0,0) \quad t \in [0,1]$$

$$\underline{s}_2(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [\pi, 0]$$

Die Bogenlänge $s(t)$ einer Kurve $\underline{s}(t)$ ist gegeben durch

$$s(t) = \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_1} |\mathrm{d}\underline{s}| = \int_{t_0}^{t_1} \left|\frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t \quad .$$

Berechnen Sie die Bogenlängen von $\underline{s}_1(t)$ und $\underline{s}_2(t)$.

3. **Differentialgleichungen I**

Lösen sie folgende Differentialgleichungen

(a) $y'(x) = -xy(x)$

(b) $\dot{x}^2 + x = U$

(c) $y'' - 3y' + y = 0$

Klausur: 13. Juli 2009 um 10.00 Uhr
Teilnahmevoraussetzungen: 50 % der Hausaufgabenpunkte. Die Punkte auf eine Aufgabe erhält man nur, wenn zu Beginn der kleinen Übungen auch die Bereitschaft gezeigt wird, die jeweilige Aufgabe vorzurechen.
Fragen an:

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317
Christoph Koenders	c.koenders@tu-bs.de	Raum A 225
Sebastian Ehmann	s.ehmann@tu-bs.de	Raum xxx
Stefan Wiehle	s.wiehle@tu-bs.de	Raum A 223