INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK WS 2001/2002
13. Übungsblatt Abgabe: Di., 29.1.2002

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, A317, Tel.: 391-5187

30. **Hamilton-Jacobi für den eindimensionalen harmonischen Oszillator**

Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad .$$

(a) Bestimmen Sie die Wirkungsfunktion $S(q,c,t) = W(q,c) - ct$ aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung.

(b) Die Funktion $S(q,p',t)$ mit $p' = c$ sei die Erzeugende einer kanonischen Transformation. Die Transformationsgleichungen sind dann gegeben durch

$$q' = \frac{\partial S}{\partial p'} \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad .$$

Zeigen Sie explizit, daß mit dieser Transformation $\mathcal{H}' = 0$ wird.

(c) Ermitteln Sie aus den (trivialen) Lösungen für q' und p' die Lösung $q(t)$ mit den Anfangsbedingungen $p(t=0) = 0$ und $q(t=0) = q_0$.

31. **Bewegung im Zentralkraftfeld**

(a) Zeigen Sie, daß in Kugelkoordinaten die Hamiltonsche Funktion für die Bewegung in einem Zentralkraftfeld mit dem Potential $V(r)$ die Form

$$\mathcal{H}(r,\theta,\phi,p_r,p_\theta,p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r)$$

hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung und dem Separationsansatz

$$S = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi) - Ut \quad ,$$

daß drei Konstanten

$$a_\phi = p_\phi, \quad a_\theta = \sqrt{p_\theta^2 + \frac{a_\phi^2}{\sin^2\theta}} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{a_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

der Bewegung existieren.