INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK — WS 2001/2002

6. Übungsblatt — Abgabe: Di., 27.11.2001

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, A317, Tel.: 391-5187

12. **Runge-Lenz-Vektor**

    Zeigen Sie, daß bei der Bewegung im Potential $V = -\alpha/r$ der Vektor

    $$\underline{A} = \underline{v} \times \underline{L} - \alpha \frac{\underline{x}}{r}$$

    eine Konstante der Bewegung darstellt und vom Zentrum zum Perihel gerichtet ist.

13. **Parabelförmige Bahn**

    Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn in der Ekliptik (Bahnebene der Erde). Der Perihelabstand betrage ein Drittel des Erdbahnradius. Die Erdbahn sei als kreisförmig angenommen. Wie lange hält sich der Komet innerhalb der Erdbahn auf?

14. **Periheldrehung**

    Ein Planet der Masse m bewegt sich in einem zentralsymmetrischen Potential $V(\varrho)$, in dessen Ursprung die Sonne steht. Die Bewegung verläuft im Endlichen, es liegt also der „gebundene Fall" vor.

    (a) Zeigen Sie, daß die Änderung des Polarwinkels φ zwischen sonnennächstem und sonnenfernstem Punkt ($\varrho_{\min}$ und ϱ_{max}) gegeben ist durch

    $$\Delta\varphi = -m \frac{\partial}{\partial L} \int_{\varrho_{\min}}^{\varrho_{\max}} \sqrt{\frac{2}{m}(U - V) - \frac{L^2}{m^2 \varrho^2}} d\varrho \qquad .$$

    (b) Für den Fall $V(\varrho) = -\gamma m M/\varrho$ ergeben sich bekanntermassen geschlossene Ellipsen, $\Delta\varphi$ ist demnach gerade π oder bei einem vollen Umlauf gerade 2π. Fügt man eine kleine, zentralsymmetrische Störung ins Potential ein

    $$V(\varrho) = -\gamma \frac{mM}{\varrho} + V_1(\varrho) \quad ,$$

    so beschreibt der Körper immer noch näherungsweise Ellipsen, deren Halbachsen sich jedoch bei jedem Umlauf um den Winkel $\delta\varphi$ verdrehen (Periheldrehung). $\delta\varphi$ ergibt sich gerade aus $\delta\varphi = 2\Delta\varphi - 2\pi$.

    Zeigen Sie, daß für $V_1(\varrho) = -\alpha/r^3$ gilt

    $$\delta\varphi = \frac{6\pi\alpha}{\gamma m M k^2} \quad \text{mit} \quad k = \frac{L^2}{\gamma m^2 M} \quad .$$

Anmerkung: Solche Störterme tauchen in der Realität tatsächlich auf, z.B. durch die Abplattung der Sonne aufgrund ihrer Eigenrotation oder auch durch allgemein relativistische Effekte. Wie man am Ergebnis sieht, ist die Periheldrehung umso größer, je kleiner die Masse des Planeten ist, daher wurde sie auch zuerst beim Merkur beobachtet.