INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK — WS 2001/2002

5. Übungsblatt — Abgabe: Di., 20.11.2001

**Fragen und Probleme:** T. Bagdonat, A317, Tel.: 391-5187

9. **Konservative Kraftfelder**

   (a) Zeigen Sie mittels des Stokesschen Satzes, daß das Kraftfeld
   $$\underline{F} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_3 \\ 2x_2 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$$
   konservativ ist.

   (b) Überprüfen Sie, daß alle Wegintegrale $\oint \underline{F} \cdot d\underline{s}$ längs Kreisen in der $x$-$y$-Ebene mit Radius $r$ und Mittelpunkt $(x_0, y_0, z_0)$ verschwinden.

   (c) Bestimmen Sie das zu $\underline{F}$ gehörige Potential $V(x_1, x_2, x_3)$.

   (d) Nun ein komplizierteres Beispiel. Zeigen Sie zunächst wieder, daß die Rotation des Kraftfeldes
   $$\underline{A} = \begin{pmatrix} -y/\varrho^2 \\ x/\varrho^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2$$
   für $\varrho \neq 0$ Null ist.

   (e) Nun sollte dies also ein konservatives Kraftfeld sein, ist es aber nicht global, sondern nur in einem lokalen (einfach zusammenhängenden) Gebiet, daß die $z$-Achse ($\varrho = 0$) nicht enthält.

   Prüfen Sie dies beispielhaft, indem Sie das Wegintegral von $\underline{A}$ über einen Kreis um den Ursprung mit Radius $r$ berechnen.

   (f) Das Problem liegt offenbar in der Singularität bei $\varrho = 0$ begründet. Alle geschlossenen Wegintegrale, die diese Singularität umschliessen, ergeben als Wert $2\pi$, diejenigen, die dies nicht tun, ergeben tatsächlich wieder Null. Überprüfen Sie dies für verschobene Kreise der Form
   $$\underline{s}(\phi) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos(\phi) \\ R\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad .$$

   ***Hinweis:*** Formeln für die zu lösenden Integrale findet man in BRONSTEIN-SEMENDJAJEW, *Taschenbuch der Mathematik*, 9. Auflage (1969) unter den Nummern 347 und 348. Bei späteren Auflagen sind evtl. die Nummern verschieden.

10. **Bewegung im $1/r$-Potential**

   Welche Zeit benötigt ein Teilchen im Potential $V = -\alpha/r$ für die radiale Bewegung von einem Punkt $r_0$ zum Zentrum $r = 0$? Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$.
   ***Hinweis:*** Bei der Intgeration substituiere man $s = 1/r$.

11. **Morse-Potential**

Ein sehr einfaches Modell für den eindimensionalen Potentialverlauf bei Molekülen ist das sogenannte MORSE-Potential mit der Form

$$V(x) = A\left[\left(e^{-ax} - 1\right)^2 - 1\right] \quad A > 0, a > 0 \qquad .$$

Es soll der „gebundene Fall“ mit Gesamtenergie $U < 0$ betrachtet werden, wobei

$$U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) \quad .$$

Bestimmen Sie

(a) die Form der eindimensionalen Bewegung $x(t)$.

(b) die Umkehrpunkte.

(c) die Periodendauer einer Schwingung.