INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK — WS 2001/2002

2. Übungsblatt — Abgabe: Di., 30.10.2001

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, A317, Tel.: 391-5187

2. **Gradient in Kugelkoordinaten** (Präsenzübung)

Der Gradient einer skalaren Funktion V hat in kartesischen Koordinaten die Form

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x^a}\underline{e}_a \quad \text{oder} \quad \nabla = \underline{e}_a \frac{\partial}{\partial x^a} \quad .$$

In einem krummlinigen Koordinatensystem ist Vorsicht angebracht. Die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten sind nämlich eine kovariante Größe (genau wie bei den kovarianten Basisvektoren). Um einen invarianten Vektor zu konstruieren, muß man diese also auf die kontravariante Basis beziehen:

$$\nabla = \underline{b}^a \frac{\partial}{\partial \xi^a} \quad . \tag{1}$$

Will man aber mit diesem Gradientenvektor rechnen, z.B. einen Kraftvektor $\underline{F} = -\nabla V$ verwenden, benötigt man in der Regel die kontravarianten Komponenten von $\underline{F} = F^a \underline{b}_a$. Weiterhin wird in der Literatur der Gradient nicht nur bereits auf diese Basis bezogen, sondern auch noch auf die Einheitsbasis $\underline{\hat{b}}_a$. Man gelangt zu solchen Formeln, indem man einfach die kontravariante Basis in (1) durch die Basis $\underline{\hat{b}}_a$ ausdrückt.

Zeigen Sie, daß dies in Kugelkoordinaten zu dem Ergebnis

$$\nabla = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\underline{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\underline{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

führt.

3. **Linienintegrale**

   (a) Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{B} = x_1\underline{e}_1 + (1 - x_2)\underline{e}_2 + 2x_1\underline{e}_3$. Berechnen Sie das Linienintegral

   $$\int \underline{B} \cdot d\underline{s}$$

   längs einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

   (b) Die logarithmische Spirale wird in Polarkkordinaten durch

   $$\varrho = a \exp(k\varphi)$$

   beschrieben. Berechnen Sie die Bogenlänge vom Ursprung bis zu dem Punkt, der durch ϱ_1 beschrieben wird und den Krümmungsradius in Abhängigkeit von ϱ.

4. **Gradient in „quasi-elliptischen“ Koordinaten**

Ebene „quasi-elliptische“ Koordinaten sind definiert über

$$x^1 = \alpha\xi^1 \cos\xi^2 \quad , \quad x^2 = \beta\xi^1 \sin\xi^2 \quad \text{und} \quad x^3 = \xi^3 \quad .$$

(a) Bestimmen Sie die ko- und kontravariante Basis, sowie g^{ab}.

(b) Bestimmen Sie die Form des Gradienten bezogen auf die kovariante Einheitsbasis $\underline{e}_a$. Betrachten Sie den Grenzfall für $\alpha = \beta = 1$ (Polarkoordinaten).