INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK | WS 2001/2002

1. Übungsblatt | Abgabe: Di., 23.10.2001

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, A317, Tel.: 391-5187

---

1. **Krummlinige Koordinaten**

   x^1, x^2, x^3 sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den zugehörigen Basisvektoren $\underline{e}_a$.

   (a) Zeigen Sie, daß im System x^a die kovariante und die kontravariante Basis identisch sind. Verwenden Sie hier und in allen folgenden Teilen *nicht* die Komponentenschreibweise für Vektoren!

   (b) Ein neues Koordinatensystem ξ^a sei definiert durch

   $$x^1 = \xi^1 \quad , \quad x^2 = \alpha \left(\xi^1\right)^2 + \xi^2 \quad , \quad x^3 = \xi^3 \quad .$$

   Bestimmen Sie die kovariante Basis $\underline{b}_a$ sowie den metrischen Tensor g_{ab}.

   (c) Zeigen Sie am konkreten Beispiel, daß

   $$\sqrt{g} = \underline{b}_1 \cdot (\underline{b}_2 \times \underline{b}_3)$$

   gilt.

   (d) Berechnen Sie nun die kontravariante Basis $\underline{b}^a$ mittels der Beziehung $\underline{b}^a = \nabla \xi^a$ und auch vermöge der Vorschrift

   $$\underline{b}^1 = \frac{\underline{b}_2 \times \underline{b}_3}{\sqrt{g}} \qquad \text{(und zyklisch)} \quad .$$

   (e) Skizzieren Sie das Koordinatensystem ξ^a sowie die ko- und kontravariante Basis im Punkt P mit den Koordinaten $\xi^1 = 2$, $\xi^2 = -1$, $\xi^3 = 0$ ($\alpha = 1/2$).

   (f) Gegeben seien nun die zwei Vektoren

   $$\underline{v} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \quad \text{und} \quad \underline{w} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$$

   in irgendeinem Punkt P. Wie man leicht sieht, gilt $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$. Bestimmen Sie die kontravarianten Komponenten v^a, w^a und die kovarianten Komponenten v_a, w_a bzgl. ξ^a.

   (g) Verifzieren Sie nun, daß das Skalarprodukt $\underline{v} \cdot \underline{w}$ nur für $\alpha = 0$ (also im kartesischen System) durch $\underline{v} \cdot \underline{w} = v^a w^a$ und allgemein durch $\underline{a} \cdot \underline{b} = v^a w_a = v_a w^a$ gegeben ist („Die Mischung aus einer ko- und einer kontravarianten Größe ergibt eine invariante Größe“, wie es beim Skalarprodukt sein muß).