INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

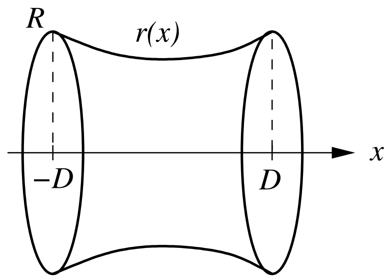
Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK — WS 2003/2004

10. Übungsblatt — Abgabe: 13.1.2004 (bis 11.25 Uhr, Kasten neben Raum A317)

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, A317, Tel.: 391-5187

30. **Minimale Oberfläche (Variationsrechnung)**



Zwei Kreisringe mit Radius R und Abstand $2D$ sind durch eine Seifenhaut verbunden. Die Form $r(x)$ dieser Haut stellt sich so ein, daß die Oberfläche minimal wird.

(a) Bestimmen Sie die Eulerschen Gleichungen für dieses Variationsproblem.

(b) Zeigen Sie, daß
$$r(x) = a \cosh(x/a)$$
die Eulerschen Gleichungen löst.

(c) Zeigen Sie graphisch, daß für genügend kleine Werte von D/R zwei Lösungen für a existieren. Welche der beiden Lösungen minimiert die Fläche tatsächlich?

31. **Poissonklammern**

$\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ sei der dreidimensionale Drehimpulsvektor. (q_1, q_2, q_3) ist der kartesische Ortsvektor und (p_1, p_2, p_3) der kanonisch konjugierte Impulsvektor. Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Poissonklammern:

(a) $\{L_i, q_j\} = \epsilon_{ijk} q_k$

(b) $\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$

(c) $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$

32. **Hamiltonsche Bewegungsgleichungen**

Bestimmen Sie für die Bewegung längs der Kurve $x_1^2 + a x_2^3 = 0$ aus Aufgabe 21 die Hamiltonsche Funktion $\mathcal{H}$ und die Hamiltonschen Gleichungen an. Als generalisierte Koordinate verwende man x_2. Reproduzieren Sie daraus die bereits bekannte Bewegungsgleichung für x_2.

33. **Kanonische Transformation**

(a) Zeigen Sie, daß die Transformation

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 & \qquad q_1' &= q_1 - p_1 \\ p_2' &= p_2 & \qquad q_2' &= q_2 - p_2 \\ p_3' &= p_3 & \qquad q_3' &= q_3 - p_3 \end{aligned}$$

kanonisch ist.

(b) Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \quad .$$

Transformieren Sie die Koordinaten q, p in die neuen Koordinaten q', p' mittels einer kanonischen Transformation, deren Erzeugende durch

$$F_1 = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot q'$$

gegeben ist. Geben Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'(q', p')$ an und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in diesen neuen Koordinaten. Transformieren Sie danach die Lösung wieder auf die alten Koordinaten q und p.