INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK — WS 2003/2004

9. Übungsblatt — Abgabe: 6.1.2004 (bis 11.25 Uhr, Kasten neben Raum A317)

Fragen und Probleme: T. Bagdonat, A317, Tel.: 391-5187

27. **Foucaultsches Pendel**

Bei einem (gut gelagerten) Pendel dreht sich die Schwingungsebene aufgrund der Erdrotation (Foucaultsches Pendel). Diese Bewegung soll genauer untersucht werden. Dazu sei ein Koordinatensystem eingeführt, dessen x_3-Achse zum Erdmittelpunkt zeigt und dessen Ursprung im Pendelaufhängepunkt liegt. Die Rotation des Ursprungs um den Erdmittelpunkt kann außer acht gelassen werden ($\underline{v}_{\mathrm{tr}} = 0$). Das System rotiert aber in sich mit $\underline{\omega} = (\omega_1, 0, \omega_3)$. Die Gravitationskraft wirkt in positive x_3-Richtung, also ist $V = -mgx_3$. Unter Vernachlässigung der quadratischen Terme in $\underline{\omega}$ ergibt sich die Langrangefunktion im rotierendes KS als

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\dot{x}}) = \frac{m}{2}\underline{\dot{x}}^2 + m\underline{\dot{x}} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{x}) + mgx_3 \quad .$$

(a) Führen Sie Kugelkoordinaten r, ϑ, φ ein und entwickeln Sie $\mathcal{L}$ bis zur zweiten Ordnung in ϑ. Es gilt natürlich die Nebenbedinung $r = L$, wenn L die Länge des Pendels ist. Man beachte, daß im gewählten KS $\vartheta = 0$ der Ruhelage entspricht.

(b) Zeigen Sie, daß sich die so erhaltene Lagrangefunktion von

$$\tilde{\mathcal{L}}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi}) = mL^2 \left\{ \frac{1}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \vartheta^2\dot{\phi}^2\right) + \omega_3\vartheta^2\dot{\varphi} - \frac{\Omega^2}{2}\vartheta^2 \right\} \quad \text{mit} \quad \Omega^2 = \frac{g}{L}$$

nur um eine totale zeitliche Ableitung unterscheidet.

(c) Zeigen Sie: Sind $\vartheta_0(t)$ und $\varphi_0(t)$ Lösungen der Lagrange Gleichungen für $\omega_3 = 0$, dann sind $\vartheta(t) = \vartheta_0(t)$ und $\varphi(t) = \varphi_0(t) - \omega_3 t$ Lösungen der Lagrange Gleichungen für $\omega_3 \neq 0$ bis auf quadratische Terme in ω_3.

(d) Es verbleibt, die Lösungen ϑ_0 und φ_0 zu bestimmen. Substituieren Sie dazu in $\tilde{\mathcal{L}}$ (mit $\omega_3 = 0$):

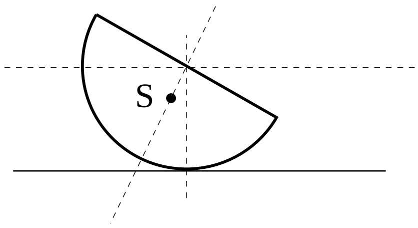
$$\xi = \vartheta\cos\varphi \quad , \quad \eta = \vartheta\sin\varphi$$

und bestimmen Sie daraus die Lösungen ϑ_0 und φ_0 für die Anfangsbedingungen $\varphi_0(0) = \dot{\varphi}_0(0) = \dot{\vartheta}_0(0) = 0$ und $\vartheta_0(0) = \hat{\vartheta}$. Geben Sie dann die endgültigen Lösungen $\varphi(t)$ und $\vartheta(t)$ für $\omega_3 \neq 0$ an. Um wieviel Grad verdreht sich die Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels pro Stunde in Braunschweig?

28. **Bewegung längs einer vorgegebenen Kurve**

Es sollen nochmals die Bewegungsgleichungen für die Bewegung längs der Kurve $x_1^2 + ax_2^3 = 0$ aus Aufgabe 22 abgeleitet werden, diesmal jedoch mittels der Lagrange Gleichungen II. Art. Verwenden Sie x_2 als generalisierte Koordinate und leiten Sie auch nur die Bewegungsgleichung für x_2 ab.

29. **Rollschwingungen eines Halbzylinders**



Der in der Skizze dargestellte Halbzylinder führt auf einer rauhen Unterlage Rollschwingungen aus (ohne auf der Unterlage zu rutschen). Es wirke wie üblich die Gewichtskraft $-mg$.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion für dieses System an.

(b) Entwickeln Sie die Winkelfunktionen in den Ausdrücken für T jeweils bis zur ersten, die in V bis zur zweiten Ordnung.

(c) Geben Sie die Bewegungsgleichung und die Schwingungsfreqeunz an.