INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

MECHANIK SS 2003

2. Klausur, Zeit: **Uebungsklausur**

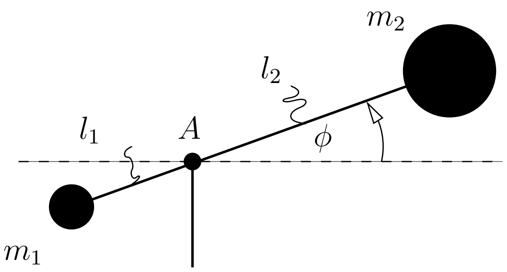
Name:

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Keine Hilfsmittel erlaubt, Aufgabenblatt mit abgeben!

1. **d'Alembertsches Prinzip**

   Zwei Massen m_1 und m_2 im homogenen Schwerefeld sind mit einer Stange der Länge $l = l_1 + l_2$ verbunden, die im Punkt A drehbar gelagert ist.



   (a) Leiten Sie aus dem d'Alembertschen Prinzip die Bewegungsgleichung für den Drehwinkel ϕ ab.

   (b) Bestimmen Sie daraus die Gleichgewichtsbedingung (Hebelgesetz).

2. **Hamilton-Jacobi**

   Ein Teilchen der Masse m bewegt sich unter Einfluß der Schwerkraft auf der Kurve $x_3 = kx_1$ (schiefe Ebene in zwei Dimensionen, $x_2 = 0$).

   (a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion un die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung auf.

   (b) Lösen Sie die HJ-DGL mit Hilfe eines Separationsansatzes.

   (c) Bestimmen Sie aus dieser Lösung die Lösung für $x_3(t)$.

3. **Kanonische Transformation**

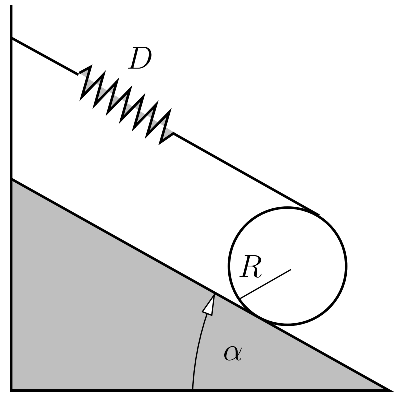
   Für welche a, b, c ist die Transformation

$$q' = aq \qquad p' = bq + cp$$

   kanonisch? Bestimmen Sie die Erzeugende Funktion $F(q, p')$. *Hinweis:* Für diese Erzeugende gilt $p = \partial F/\partial q$ und $q' = \partial F/\partial p'$.

4. **Lagrange II**

   Ein homogener Vollzylinder mit Radius R und Masse m rollt (ohne zu rutschen) unter dem Einfluß der Schwerkraft eine um den Winkel α geneigte schiefe Ebene hinunter. Dabei wird er von einer Feder mit Federkonstanten D zurückghalten (s. Skizze). Beim Abrollen wird der masselose Faden auf den Zylinder aufgewickelt.



   (a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System auf. Als generalisierte Koordinate verwende man den Abstand des Schwerpunktes von dem Punkt, an dem die Feder keine Kraft ausübt, parallel zur Ebene gemessen.
   (b) Bestimmen Sie die daraus die Bewegungsgleichung.
   (c) Berechnen Sie die Gleichgewichtslage und die Schwingungsfrequenz des Zylinders.

5. **Hamilton-Funktion**

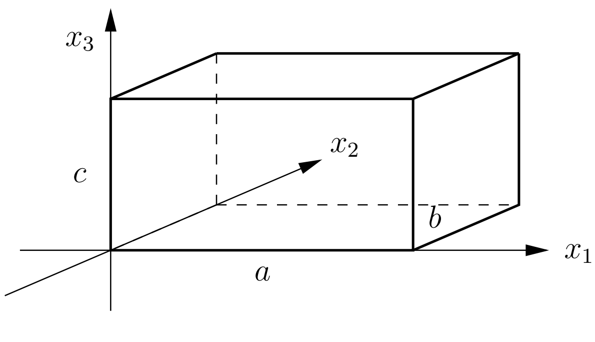
   Gegeben Sei die Lagrangefunktion für ein Teilchen im rotierenden Bezugssystem

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2 + m\dot{\underline{q}} \cdot \left(\underline{\Omega} \times \underline{q}\right) + \frac{m}{2}\left(\underline{\Omega} \times \underline{q}\right)^2 \quad .$$

   (a) Bestimmen Sie den zu $\underline{q}$ zugehörigen kanonisch konjugierten Impuls.
   (b) Bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonsche Funktion $\mathcal{H}(\underline{p}, \underline{q})$.
   (c) Geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.

6. **Trägheitstensor**

   Gegeben Sei ein Quader mit den Seitenlängen a, b, c und homogener Massendichte ρ.



(a) Bestimmen Sie den Trägheitstensor in bezug auf eine Ecke des Qauders im skizzierten Koordinatensystem.

(b) Geben Sie die Lage der Hauptachsen sowie die Hauptträgheitsmomente an.

(c) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von (a) den Trägheitstensor im Schwerpunkt des Würfels mit Hilfe des Steinerschen Satzes.

7. **Poissonklammern**

Zeigen Sie mit Hilfe der Definiton der Poissonklammer $\{A, B\}$, daß

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B$$

gilt.

8. **Satz von Liouville**

Die allgemeine Lösung für den eindimensionalen ungedämpften harmonischen Oszillator mit $q(t = 0) = q_0$ und $\dot{q}(t = 0) = \dot{q}_0$ lautet

$$q = q_0 cos(\omega t) + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad .$$

Verifizieren Sie den Satz von Liouville für diesen Fall.