INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK SoSe 2004

16. Übungsblatt Abgabe: Präsenzübung, freiwillige Abgabe (bis Dienstag, 3.8.04, 13:00 Uhr)

Sprechstunden vor der 2. Klausur: Dienstag, 3.8., Mittwoch, 4.8., Donnerstag, 5.8., und Freitag, 6.8., jeweils 11-12 Uhr; F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184.
Keine Sprechstunde in der Woche vom 26.7.- 30.7.04!
Wenn Sie dieses Aufgabenblatt abgeben, dann können Sie die korrigierte Lösung am Donnerstag, den 5.8.04, abholen (11-12 Uhr, Raum A 313).

63. **Präzessionsfrequenz eines kräftefreien symmetrischen Kreisels (0 Punkte)**
Leiten Sie die Kreisfrequenz Ω her, mit der $\vec{\omega}$ um die Figurenachse eines kräftefreien symmetrischen Kreisels umläuft.

64. **Eulersche Gleichungen (0 Punkte)**
Ermitteln Sie für einen kräftefreien Kreisel mit $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ die fixen Drehachsen (d.h., diejenigen $\vec{\omega}$, für die im körperfesten System $\dot{\vec{\omega}} = 0$ gilt).

65. **Kanonische Bewegungsgleichungen (0 Punkte)**
Gegeben sei eine Lagrangefunktion L. Leiten Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen her, indem Sie das totale Differential von H bilden!

66. **Kanonische Transformationen (2 Punkte)**
Für welche a, b, c ist die Transformation

$$Q = aq \qquad\qquad P = bq + cp$$

kanonisch? Berechnen Sie die Erzeugende $F_2(q, P)$. (Hinweis: $\frac{\partial F_2}{\partial q} = p, \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q$.)

67. **Hamilton-Jacobi Theorie I (4 Punkte)**
Ein Teilchen der Masse m bewegt sich (eindimensional) unter dem Einfluß des Potentials $V = (f/2)x^2 + 2kx$; $f, k =$const.
   (a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion und die Hamilton-Jacobi Differentialgleichung auf.
   (b) Verwenden Sie einen Separationsansatz zur Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung und geben Sie die beiden neuen (konstanten) Variablen an.
   (c) Geben Sie $x(t)$ an.

68. **Hamilton-Jacobi Theorie II (4 Punkte)**
Gegeben sei die Hamiltonfunktion:

$$H = p^6 q^{1/12}\,.$$

Stellen Sie die Hamilton-Jacobi Differentialgleichung und lösen Sie diese. Verwenden Sie Ihr Ergebnis, um die Bahnkurve $q(t)$ zu ermitteln.

→ *Bitte wenden!*

69. **Lagrangeparameter, Lagrangegleichungen I. und II. Art (3 Punkte)**
Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einem Zylindermantel.

$$L = \int_{P_1}^{P_2} ds\,.$$

Berücksichtigen Sie die Nebenbedingung (i) durch Einführung geeigneter Koordinaten, (ii) durch Einführung eines Lagrangeparameters λ. Eliminieren Sie bei (ii) λ, indem Sie die Nebenbedingung zweimal nach s differenzieren.

70. **Trägheitstensor (4 Punkte)**
Berechnen Sie den Trägheitstensor für folgende Massenverteilungen:

(a) 8 Massenpunkte der Masse m, die auf den Ecken eines Würfels sitzen (Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Würfels, die Ortsvektoren sind $\vec{r}_i = (\pm a, \pm a, \pm a)$).

(b) eine Kugel mit Radius R und Massendichte $\rho(\vartheta) = \alpha \sin(\vartheta)$.

71. **Diatomare, lineare Kette (5 Punkte)**
Betrachten Sie eine unendlich lange lineare Kette, in der abwechselnd Massenpunkte der Masse m_1 bzw. m_2 über Federn mit Federkonstante f gekoppelt sind. Der Abstand der Massenpunkte sei a.

(a) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$.

(b) Skizzieren Sie $\omega(k)$ für $-\pi/2 < ka < \pi/2$. Diskutieren Sie den Grenzfall $k \to 0$.

(c) Ermitteln Sie die Eigenvektoren für $k = 0$.

72. **Poissonklammern (2 Punkte)**
Zeigen Sie folgende Eigenschaft der Poissonklammer (Jacobi-Identität):

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

73. **Wissensfragen (0 Punkte)**

(a) Wodurch unterscheidet sich die Bewegungsgleichung in einem Inertialsystem Σ von der Bewegungsgleichung bezogen auf ein Bezugssystem, dass sich in Bezug auf Σ beschleunigt bewegt?

(b) Ist das körperfeste Koordinatensystem eines starren Körpers ein Inertialsystem?

(c) Wie lautet die Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens in einem konstanten elektrischen Feld?

(d) Wie lautet die Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens in einem magnetischen Feld?

(e) Wie lautet die Hamiltonfunktion für das Wasserstoffproblem (Elektron und Proton)?

(f) Gegeben sei eine Observable $C = C(q_i, p_i, t)$. Drücken Sie dC/dt mit Hilfe von Poissonklammern aus!

(g) Sei A eine Erhaltungsgröße. Was folgt dann für die Poissonklammer $[A, H]$, wobei H die Hamiltonfunktion ist?

(h) q, p sei ein Paar kanonisch konjugierter Variablen. Was ergibt die Poissonklammer $[q, p]$?

(i) Wie kann man die kanonischen Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Poissonklammern ausdrücken?

(j) Ein Elektron und ein Proton wechselwirken über die Coulomb Kraft. Was ergibt sich hier für $[L^2, H]$ ($\vec{L}$ ist der Drehimpuls)?