INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK — SoSe 2004

14. Übungsblatt — Abgabe: Montag, 19.7.04, bis 18.00 Uhr

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).
Termine: Die 2. Klausur findet am Montag, den 9.8.2004, von 9-11 Uhr im Audimax statt. **Hilfsmittel** sind nicht zugelassen. Bitte denken Sie daran, Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis mitzubringen!

55. **Poissonklammern (5 Punkte)**
Berechnen Sie für das Keplerproblem die folgenden Poissonklammern:

(a) $[L_i, H]$. (b) $[R_i, H]$.

Dabei sind die R_i die Komponenten des Runge-Lenz Vektors $\vec{R} = \vec{v} \times \vec{L} + V(\vec{r})\vec{r}$, $\vec{L}$ ist der Drehimpuls und H ist die Hamiltonfunktion für die Relativbewegung (d.h., die Schwerpunktbewegung soll nicht berücksichtigt werden). Verwenden Sie hierbei Komponentenschreibweise, also insbesondere Summenkonvention und $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Rechnen Sie mit kartesischen Koordinaten, d.h., $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$! $r_3 = 0$ darf nicht a priori verwendet werden!

56. **Kanonische Transformationen (8 Punkte)**

(a) Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die Poissonklammern $[Q, P]_{q,p} = 1$, $[Q, Q]_{q,p} = 0$, $[P, P]_{q,p} = 0$ erfüllt sind. Für welche reellen Parameter α, β ist die Transformation $Q = q^\alpha \cos \beta p$ und $P = q^\alpha \sin \beta p$ kanonisch?

(b) Gegeben ist die erzeugende Funktion

$$F_2(q, P) = 2\sqrt{\frac{P^2}{4} - e^q} - P \text{ arcosh} \left(\frac{P}{2} e^{-\frac{q}{2}} \right).$$

Bestimmen Sie die kanonische Transformation, die durch F_2 definiert ist. Transformieren Sie die Hamiltonfunktion

$$H = p^2 + e^q$$

mit dieser Transformation. Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichung in den transformierten Koordinaten. Geben Sie die Lösung auch in den Koordinaten $q(t)$,$p(t)$ an.

(c) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F_3(p, Q)$, die die gleiche kanonische Transformation erzeugt, wie $F_2(q, P) = q^2 e^P$.

(d) (**keine Abgabe, große Übung!**) Betrachten Sie die kanonische Transformation $Q = aq + bp$ mit $P = cq + dp$ mit $b \neq 0$ und $ad - bc = 1$. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F_1(q, Q)$.

→ *Bitte wenden!*

57. **Hamilton-Jacobi Theorie (4 Punkte, freiwillige Abgabe)**
Ein Massenpunkt bewegt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft $\vec{K} = -mg\vec{e}_z$ auf der Kurve $z = ax$.

(a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen ab.

(b) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung auf. Lösen Sie diese mit Hilfe eines Separationsansatzes. Ermitteln Sie $z(t)$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

58. **Wissensfragen (5 Punkte, freiwillige Abgabe)**

(a) Was besagt das Euler-Theorem?

(b) Wie lautet die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Masse m im Schwerefeld?

(c) Wie lautet die Hamiltonfunktion für den eindimensionalen harmonischen Oszillator?

(d) Wie lautet die Hamiltonfunktion des Keplerproblems?

(e) Was ist das Ziel der Hamilton-Jacobi Theorie?

(f) Welche Größe wird mit Hilfe der Hamilton-Jacobi Gleichung bestimmt?

(g) Geben Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator an.

(h) Wie ist das Phasenraumvolumen definiert? Wie verhält sich das Phasenraumvolumen unter kanonischen Transformationen?

(i) Wie lauten die kanonischen Bewegungsgleichungen für ein freies Teilchen?

(j) Die Poissonklammer ist antisymmetrisch. Was bedeutet das?