INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK SoSe 2004

13. Übungsblatt Abgabe: Freitag, 9.7.04, bis 12.30 Uhr

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).

50. **Duffing-Oszillator: Stabilitätsanalyse, Fixpunkte (4 Punkte)**
Betrachten Sie das eindimensionale Potential

$$V(x) = -(1/2)\beta x^2 + (1/4)kx^4$$

mit $\beta, k =$const; $k > 0$. Skizzieren Sie $V(x)$ für $\beta = 0, \beta > 0, \beta < 0$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und ermitteln Sie die Fixpunkte in Abhängigkeit von β (Fallunterscheidung). Ermitteln Sie den Typ der Fixpunkte für $\beta \neq 0$, indem Sie die Bewegungsgleichung jeweils linearisieren und danach lösen.

51. **Phasenraum (6 Punkte)**

(a) *(1D harmonischer Oszillator)* Geben Sie für (siehe Aufgabe 12)

i. den ungedämpften harmonischen Oszillator,

ii. den gedämpften harmonischen Oszillator ($\gamma < \omega_0$),

iii. und den mit $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ angetriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator ($\gamma < \omega_0$)

jeweils $x(t)$ und den zugehörigen Impuls $p(t) = m\dot{x}$ unter den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0, p(t=0) = 0$ an. Plotten Sie für alle drei Fälle $p(t)$ versus $x(t)$ für $\gamma = \omega_0/2, \omega = 3\omega_0$. (hierzu können Sie geeignete Plotprogramme verwenden; setzen Sie zum Plotten $x_0 = 1, f_0 = 1, m = 2, \omega_0 = 1$).
Welches sind für Fall (i) die Linien konstanter Gesamtenergie im Phasenraum (q, p)?

(b) Ermitteln Sie für den freien Fall die Kurven konstanter Energie im Phasenraum und fertigen Sie eine Skizze an.

52. **Hamilton-Funktion (4 Punkte)**
Die Hamilton-Funktion ist über eine Legendre-Transformation definiert:

$$H(p_i, q_i) = \sum_l p_l \dot{q}_l - L(\dot{q}_i, q_i) \tag{1}$$

Ermitteln Sie für die folgenden Beispiele, ausgehend von der (aus vorherigen Aufgaben bekannten) Lagrangefunktion, jeweils die kanonischen Impulse und stellen Sie die Hamiltonfunktion über ihre Definition Gl. (1) auf. Leiten Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen ab. Stellen Sie in (b) und (c) außerdem die Bewegungsgleichungen für die jeweiligen Freiheitsgrade auf.

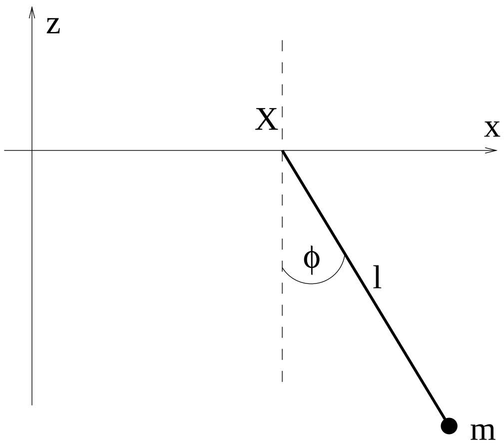
(a) Ein Massenpunkt (Masse m) auf der Zwangskurve $x^2 + kz^3 = 0$ (siehe Aufgabe 8).

(b) Siehe Aufgabe 17 (b).

(c) Anisotroper, dreidimensionaler harmonischer Oszillator (siehe Aufgabe 29).

→ *Bitte wenden!*

53. **Hamilton-Mechanik (5 Punkte)**
Der Aufhängepunkt eines mathematischen Pendels vollzieht Oszillationen (siehe Skizze) nach dem Gesetz $X = a\cos(\omega t)$. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion, die kanonischen Bewegungsgleichungen sowie die Bewegungsgleichung für den einen Freiheitsgrad des Systems.



54. **Wissensfragen (5 Punkte, freiwillige Abgabe)**

(a) Gegeben sei eine Lagrangefunktion $L = T - V = L(\dot{q}_i, q_i)$, die quadratisch in den $q_i, \dot{q}_i$ ist. Wie sind Normalkoordinaten η_i definiert? Welche Form hat $L = L(\dot{\eta}_i, \eta_i)$?

(b) Gegeben sei eine symmetrische reelle Matrix A. Wie konstruiert man die orthogonale Transformation U, die A diagonalisiert?

(c) Skizzieren Sie die Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ der einatomigen, linearen Kette. Was ergibt sich für $\omega(k)$ im Grenzfall kleiner k?

(d) Wodurch sind Gleichgewichtspunkte bzw. Fixpunkte definiert?

(e) Erklären Sie anhand geeigneter Skizzen, wie das Potential V in der Nähe von stabilen/instabilen Fixpunkten bzw. Sattelpunkten aussieht!

(f) Welches sind die zyklischen Variablen bzw. Erhaltungsgrößen des schweren, symmetrischen Kreisels?

(g) Wie bestimmt man die Hamiltonfunktion für konservative Systeme mit skleronom-holonomen Zwangsbedingungen?

(h) Ein Zylinder rollt auf einer schiefen Ebene. Wie lautet die Rollbedingung?

(i) Wie lauten die Eulerschen Gleichungen für einen symmetrischen Kreisel?

(j) An einer Feder der Länge l hängt im Schwerefeld eine Masse m. Die Masse wird um die Länge $2l$ aus der Ruhelage ausgelenkt. Wie groß ist dann die Gesamtenergie des Systems?