INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK | SoSe 2004

12. Übungsblatt | Abgabe: Freitag, 2.7.04, bis 12.30 Uhr

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).
Termine: am Mittwoch, den 30.6.04, findet anstelle der Übungen in kleinen Gruppen eine gemeinsame Übungsstunde für alle drei Gruppen zur Besprechung von Blatt 11 im MS 3.1 statt (15:00-16:30 Uhr).

47. **Quadratische Lagrangefunktion (8 Punkte)**
Diskutieren Sie folgende Lagrangefunktion:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i,j=1}^{3} t_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \sum_{i,j=1}^{3} v_{ij}q_iq_j \tag{1}$$

mit

$$t_{ij} = \frac{m_i}{2}\delta_{ij}; \quad v_{ij} = v_{ji}\,.$$

δ_{ij} ist das Kronecker-δ Symbol.

(a) Zeigen Sie, dass sich L als

$$L = \dot{\vec{q}}^T\mathbf{T}\dot{\vec{q}} - \vec{q}^T\mathbf{V}\vec{q}$$

schreiben läßt. Geben Sie explizite Ausdrücke für die Matrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{V}$ sowie $\dot{\vec{q}}$ und $\vec{q}$ an.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Klassifizieren Sie die DGLn. Zeigen Sie, dass sich die BWGLn als

$$\ddot{\vec{q}} = A\vec{q} \tag{2}$$

schreiben läßt.

(c) Betrachten Sie im folgenden den Spezialfall ($m_1 = m_2 = m_3 =: m$):

$$v_{11} = v_{33} = f/2;\ v_{22} = f;\ v_{12} = v_{23} = -f/2;\ v_{13} = 0\,. \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Lösung der BWGL (2) für diesen Spezialfall mit Hilfe des Ansatzes $\vec{q} = \vec{c}e^{\lambda t}$.

(d) Geben Sie die orthogonale Transformation U an, die $\mathbf{V}$ diagonalisiert (vgl. Aufgabe 2). Transformieren Sie auf neue Koordinaten $\eta_i = U_{ji}q_j$. Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\eta_i, \dot{\eta}_i)$ auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung für die η_i ab. Klassifizieren Sie die DGLn und geben Sie die allgemeine Lösung an. Wie sieht dann die allgemeine Lösung für die ursprünglichen Koordinaten q_i aus?

(e) Geben Sie ein Beispielsystem aus der Mechanik an, dass durch eine quadratische Lagrangefunktion vom Typ Gl. (1) mit den Zusatzvoraussetzungen aus Gl. (3) beschrieben wird.

→ *Bitte wenden!*

48. **Lineare Kette mit 2 Federkonstanten (7 Punkte)**
Eine unendlich lange lineare Kette enthält Massenpunkte der Masse m, die durch Federn gekoppelt sind. Die Federkonstanten sind abwechselnd f_1 bzw. f_2. Die Auslenkung aus der Ruhelage sei mit x_j für Massen an geraden Plätzen ($j = 2l$) und mit y_j für Massen an ungeraden Plätzen ($j = 2l+1$) bezeichnet.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

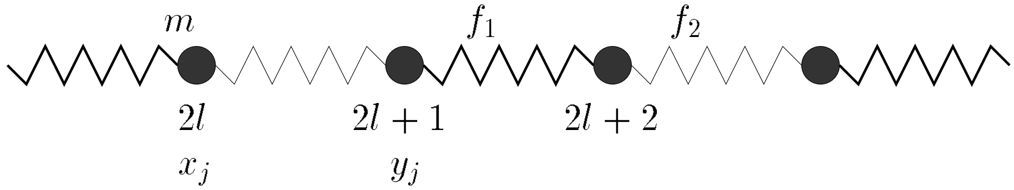
(b) Lösen Sie diese mit dem Ansatz

$$x_j = a\exp(i\lambda t - i\alpha j) \qquad\qquad y_j = b\exp(i\lambda t - i\alpha j)$$

und leiten Sie die Dispersionsrelation $\lambda(\alpha)$ her.

(c) Skizzieren Sie für $0 \le \alpha \le \pi$ die Dispersionsrelation. Für welche Frequenzen können sich in dem System Wellen ausbreiten? Zeigen Sie, daß sich für $f_1 = f_2$ die aus der Vorlesung bekannte Dispersionsrelation der linearen Kette ergibt.

(a) Ermitteln Sie für $\alpha = 0$ die Eigenvektoren.



49. **Wissensfragen (5 Punkte, freiwillige Abgabe)**

(a) Der Trägheitstensor wird durch eine symmetrische Matrix dargestellt. Was folgt daraus?

(b) Was ist ein symmetrischer Kreisel?

(c) Wie sieht das Trägheitsellipsoid eines symmetrischen Kreisels aus?

(d) Was versteht man unter einem schweren Kreisel?

(e) Gegeben sei ein Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Für Rotationen um welche Drehachsen $\vec{\omega}$ liegen Fixpunkte der Eulerschen Gleichungen vor? Welches sind stabile bzw. instabile Fixpunkte?

(f) Erklären Sie den Begriff Figurenachse anhand einer geeigneten Skizze!

(g) Definieren Sie den Begriff Knotenlinie anhand einer geeigneten Skizze!

(h) Was versteht man unter der Präzessionsbewegung eines symmetrischen Kreisels?

(i) Was ist die Nutationsbewegung eines symmetrischen Kreisels?

(j) Geben Sie das Transformationsverhalten des Trägheitstensors unter Koordinatentransformationen $x_i = D_{ij}x'_j$ mit $D_{ij}D_{lj} = \delta_{il}$ an!