INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK — SoSe 2004

11. Übungsblatt — Abgabe: Freitag, 25.6.04, bis 12:30 Uhr

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).

43. **Momenten-freier starrer Körper (5 Punkte)**
Ein starrer Körper mit Trägheitstensor I rotiere mit der Frequenz $\vec{\omega}$ um eine momentane Drehachse durch seinen Massenschwerpunkt. Es wirken keine äußeren Drehmomente oder Kräfte.

    (a) Zeigen Sie, dass die Flächen konstanter Rotationsenergie T_{rot} im $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$-Raum Ellipsoiden sind. Bestimmen Sie die Halbachsen.

    (b) Zeigen Sie, dass für den Drehimpuls gilt: $\vec{L} = \nabla_\omega T_{\text{rot}}$. Interpretieren Sie diesen Zusammenhang geometrisch.

    (c) Bestimmen Sie die Flächen konstanten Betrages des Drehimpulses im $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$-Raum.

    (d) Diskutieren Sie die Bewegung des freien, starren Körpers bei gegebener Energie T_{rot} und Drehimpuls $\vec{L}$. Welches sind die möglichen Drehachsen und Frequenzen?

44. **Eulersche Gleichungen (6 Punkte)**
Welches Drehmoment wird benötigt, um ein homogenes Rotationsellipsoid (Masse M, Halbachsen $a, c = b$) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 um eine Achse zu drehen ($\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$), die mit der großen Halbachse a den Winkel α einschließt? Geben Sie das Drehmoment als Funktion von a, c und M an!
Hinweis: beachten Sie, dass Sie das Drehmoment bezogen auf das körperfeste System erhalten.

45. **Wissensfragen (5 Punkte, freiwillige Abgabe)**

    (a) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Extremalprinzipien und den Euler-Lagrange Gleichungen anhand eines einfachen Beispiels!

    (b) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen I. Art an.

    (c) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen II. Art an.

    (d) Wie ist die Wirkung definiert?

    (e) Erläutern Sie die Aussage des Hamiltonschen Prinzips anhand einer geeigneten Skizze ($\dot{q}_i(t)$ versus $q_i(t)$).

    (f) Wie ist der Trägheitstensor für (i) eine endliche Anzahl von Massenpunkten bzw. (ii) eine kontinuierliche Massenverteilung definiert?

    (g) Geben Sie die Volumenelemente für Zylinder- und Kugelkoordinaten an!

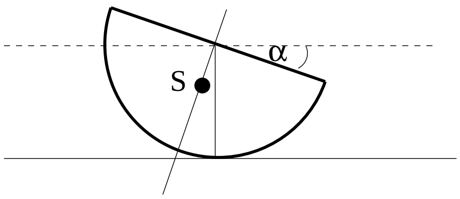
    (h) Geben Sie eine möglichst knappe Definition des Begriffes starrer Körper an!

    (i) Wieviele und welche Freiheitsgrade hat ein starrer Körper?

    (j) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Definition der Eulerschen Winkel hervorgeht!

→ *Bitte wenden!*

46. **Schwingender Halbzylinder (8 Punkte)**
Ein homogener Halbzylinder kann, wenn er mit der runden Seite nach unten auf eine waagrechte Fläche gelegt wird, unter dem Einfluß der Schwerkraft $\vec{K} = -Mg\vec{e}_z$ Rollschwingungen ausführen. (Siehe Abb.)



(a) Berechnen Sie den Massenschwerpunkt $\vec{S}$. Welches ist die momentane Drehachse $\vec{\omega}$? Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Halbzylinders bezüglich dieser Achse.

(b) Verwenden Sie

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{1}$$

wobei v die Geschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem, v_0 die Geschwindigkeit im körperfesten Koordinatensystem, $\vec{\omega}$ die Kreisfrequenz und $\vec{r}$ der Ortsvektor ist. Benutzen Sie (1), um für die kinetische Energie eines starren Körpers, dessen Ursprung nicht der Schwerpunkt ist,

$$T_{kin} = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j + M\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{S}) \tag{2}$$

zu zeigen, wobei $\vec{v}_0$ die Geschwindigkeit des Koordinatenursprungs ist und $\vec{S}$ der Vektor Koordinatenursprung-Schwerpunkt, M ist die Masse des Halbzylinders.

(c) Bestimmen Sie ausgehend von (2) die kinetische Energie des schwingenden Halbzylinders $T(\alpha, \dot{\alpha})$. Beachten Sie, dass der Halbzylinder rollt, ohne zu rutschen.

(d) Bestimmen Sie die potentielle Energie $V(\alpha)$.

(e) Ersetzen Sie die Winkelfunktionen in T durch die erste Ordnung ihrer Reihenentwicklung, in V durch die ersten beiden Ordnungen (warum?) und stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

(f) Berechnen Sie die Bewegungsgleichung, geben Sie die Schwingungsfrequenz an.