INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK SoSe 2004

10. Übungsblatt Abgabe: Freitag, 18.6.04, bis 12:30 Uhr

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).
Die große Übung am Mittwoch, den 16.6.04, findet ausnahmsweise um 8.00 Uhr im MS 3.2 statt!

39. **Variationsrechnung III (5 Punkte, freiwillige Abgabe)**

Ein Lichtstrahl bewegt sich in der xy-Ebene vom Punkt $P_1 = (0,0)$ zum Punkt $P_2 = (0,1)$. Nach dem Fermatschen Prinzip wählt er hierzu den Weg, bei dem die optische Weglänge

$$\Delta = \int_{P_1}^{P_2} n ds$$

extremal wird.

(a) Zeigen Sie, dass die optische Weglänge für von x abhängigen Brechungsindex $n(x)$

$$\Delta = \int_{P_1}^{P_2} n(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \tag{1}$$

ist.

(b) Zeigen Sie, dass Gl. (1) für $n(x) = n_0 = const.$ auf eine Gerade führt.

(c) Berechnen Sie den Weg des Lichts ausgehend von (1) mit $n(x) = \frac{1}{x}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis und skizzieren Sie den Weg des Lichstrahls in der Ebene.

40. **Wirkungsintegral (4 Punkte)**

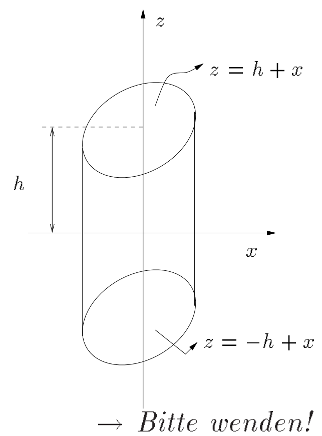
Die Lagrangefunktion $L(z,\dot{z}) = (m/2)\dot{z}^2 - mgz$ beschreibt einen Massenpunkt im Schwerefeld. Berechnen Sie das Wirkungsintegral

$$S = \int_0^{t_0} L(z,\dot{z})\, dt$$

für $z(t) = -(g/2)(t-t_0)^2 + f(t)$. Die Abweichung $f(t)$ von der tatsächlichen Bewegung sei eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(t_0) = 0$. Berechnen Sie die Wirkung in Abhängigkeit von $f(t)$. Zeigen Sie, dass die Wirkung für $f(t) \equiv 0$ minimal wird.

41. **Trägheitstensor (8 Punkte)**

Berechnen Sie den Trägheitstensor eines schräg angeschnittenen Zylinders der Höhe $2h$ mit Radius R bezüglich des skizzierten Koordinatensystems. Die Massendichte ρ_0 sei homogen. Bestimmen Sie anschließend die Eigenwerte und Eigenvektoren des Tensors.
Hinweis: führen Sie zur besseren Übersichtlichkeit der Rechnung die Hilfsgröße $\epsilon = (2/3)h^2/R^2$ ein.



→ *Bitte wenden!*

42. **Rollende Zylinder (5 Punkte)**
Betrachten Sie einen Zylinder, der auf einer schiefen Ebene unter dem Einfluß der Schwerkraft abrollt, ohne zu rutschen. Der Zylinder trägt die Massenverteilung $\rho(r) = \rho_0 r$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bezogen auf ein körperfestes System des Zylinders).

(a) Welche Beschleunigung erfährt der Zylinder in der Rollrichtung? Vergleichen Sie mit (i) einem Zylinder homogener Massendichte, aber gleicher Gesamtmasse; (ii) einem Hohlzylinder gleicher Gesamtmasse, bei dem die (konstante) Massendichte auf den (infinitesimal) dünnen Mantel beschränkt ist. Der Radius sei jeweils R und die Höhe sei h. Verwenden Sie die Lagrange-Gleichungen II. Art zum Aufstellen der Bewegungsgleichung.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) (für beliebiges Trägheitsmoment Θ) mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen I. Art auf. Bestimmen Sie alle auftretenden Lagrange-Parameter.